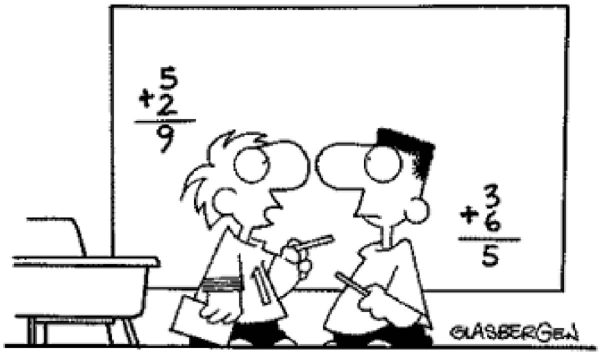
BIOFÍSICA



Clase 1.

Unidad 1. Herramientas Básicas de Matemática

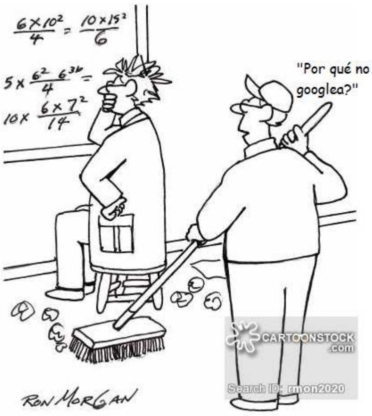
Curso de Ingreso a FCM-UNSE, 2017

La **Biofísica** es la **Física** de la vida, donde las **Matemáticas** forman una parte esencial de su lenguaje. Este lenguaje nos permitirá comprender en profundidad los principios básicos de la **Biofísica** y, a partir de eso, cómo funcionan los seres vivos, y cómo interactúan con el medio ambiente y responden al mismo.

Así como las **Matemáticas** son el lenguaje de la **Física**, la **Biofísica** es la base esencial de la **Fisiología Humana,** y por ende, la **Medicina**.

Notación científica y Cifras Significativas

$10^6 = 1.000.000$	$6{,}3\times10^6 = 6.300.000$
$10^5 = 100.000$	$6{,}3\times10^5 = 630.000$
$10^4 = 10.000$	$6{,}3\times10^4 = 63.000$
$10^3 = 1.000$	$6{,}3\times10^3 = 6.300$
$10^2 = 100$	$6{,}3\times10^2 = 630$
$10^1 = 10$	$6{,}3\times10^1 = 63$
$10^0 = 1$	$6{,}3\times10^0 = 6{,}3$
$10^{-1} = 0{,}1$	$6{,}3\times10^{-1} = 0{,}63$
$10^2 = 0{,}01$	$6{,}3\times10^{-2} = 0{,}063$
$10^{-3} = 0{,}001$	$6{,}3\times10^{-3} = 0{,}0063$
$10^{-4} = 0{,}0001$	$6{,}3\times10^{-4} = 0{,}00063$
$10^{-5} = 0{,}00001$	$6{,}3\times10^{-5} = 0{,}000063$
$10^{-6} = 0{,}000001$	$6{,}3\times10^{-6} = 0{,}0000063$



Concepto de Logaritmo

Definimos al logaritmo de un número como el exponente al que hay que elevar la base para que de este número. Usamos la misma base para todos los números, y lo único que cambiamos es su exponente. Todo logaritmo es un exponente

logaritmo

$$N = b^a$$

número base

Las bases más usadas son los números e = 2,718… y el número 10. Los logaritmos en base e se llaman Neperianos (viene de Napier) o naturales, y se representan por el símbolo *ln*. Los logaritmos en base 10 se llaman decimales, y se representan por log o Lg. Veamos dos ejemplos:

$$log_{10} 100 = 2; \quad log_{10} 1000 = 3$$

Concepto de Logaritmo

Notar que si expresamos los números en notación científica, el valor del logaritmo se hace más evidente: ¿A qué exponente elevamos 10 para obtener el número 100? El resultado del ejemplo es

$$\log_{10} 10^2 = 2$$

Lo mismo ocurre para 1000

$$\log_{10} 10^3 = 3$$

Otros ejemplos: N	log
$1000 = 10^3$	3
$100\,000 = 10^5$	5
$0{,}001=10^{-3}$	-3
$0{,}00001=10^{-5}$	-5

Si el número es potencia de 10, el logaritmo es un número entero, e igual al exponente. Si el *log 10 = 1* y el *log 100 = 2*; al ser veinte un número intermedio entre 10 y 100, su logaritmo será mayor que 1 y menor que 2, en este caso, 1,3.

Propiedades de los Logaritmos

a) El logaritmo de la base es siempre la unidad.

$$ln\, e = ln\, e^1 = 1 \qquad log\, 10 = log\, 10^1 = 1$$

b) el logaritmo de la unidad en cualquier base es siempre cero

$$log_b\, 1 = log_b b^0 = 0$$

Propiedades de los Logaritmos

c) el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log(a \times b) = \log a + \log b$$

$$\log(10^8 \times 10^5) = \log 10^8 + \log 10^5 = \log 10^{8+5} = 8 + 5 = 13$$

d) El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y el divisor.

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log \frac{10^8}{10^5} = \log 10^8 - \log 10^5 = \log 10^{8-5} = 8 - 5 = 3$$

Propiedades de los Logaritmos

e) el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.

$$\log a^6 = 6 \times \log a$$

$$\log\left(10^8\right)^5 = 5 \times \log\left(10^8\right) = 8 \times 5 = 40 \qquad \log\left(10^8\right)^5 = \log\left(10^{8\times 5}\right) = \log 10^{40} = 40$$

f) El logaritmo de una raíz es igual al cociente del logaritmo del radicando por el índice.

$$\log \sqrt[6]{a} = \frac{\log a}{6} \qquad \log \sqrt[5]{10^8} = \frac{\log 10^8}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

$$\log \sqrt[5]{10^8} = \log 10^{\frac{8}{5}} = \log 10^{1{,}6} = 1{,}6$$

Antilogaritmos

Se llama antilogaritmo, al número que corresponde a un logaritmo dado. Se representa como antilog.

antilog $5=10^5 = 100.000$; En efecto: *log* $100.000 = 5$
antilog $(-3)= 10^{-3} = 0,001$; En efecto: *log* $0,001 = -3$
antilog $5,3 = 200.000$; En efecto: *log* $200.000 = 5,3$

Despeje de Ecuaciones

Es importante saber despejar ecuaciones. Para ello, sólo hay que recordar algunas pocas cosas:

1 - Lo que está sumando pasa restando
2 - Lo que está restando pasa sumando
3 – Lo que está multiplicando pasa dividiendo
4 - Lo que está dividiendo pasa multiplicando
5 - Lo que está como potencia pasa como raíz
6 - Lo que está como raíz pasa como potencia

Ejemplos

$5 + x = 10 \rightarrow x = 10 - 5$

$4 = \frac{8}{x} \rightarrow x = \frac{8}{4}$

$x^2 = 25 \rightarrow x = \sqrt{25}$

$2x^2 = 20 - 4 \rightarrow x^2 = \frac{16}{2} \rightarrow x = \sqrt{\frac{16}{2}}$

$\frac{4 + 2x^2}{10} = 20 \rightarrow 4 + 2x^2 = 20 \times 10 \rightarrow 2x^2 = (20 \times 10) - 4$

$\rightarrow x^2 = \frac{(20 \times 10) - 4}{2} \rightarrow x = \sqrt{\frac{(20 \times 10) - 4}{2}}$

Redondeo de Cifras

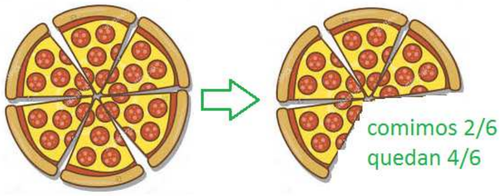
5	1,	0	4	8	0	5	3
decenas	unidades	décimas	centésimas	milésimas	diezmilésimas	cienmilésimas	millonésimas

51,048053
51,04805
51,0481
51,048
51,05
51,1
51

Al redondear se reduce el número de cifras significativas. Si el dígito eliminado es ≥ 5 se incrementa 1 al dígito previo, si es menor, se lo elimina directamente.

Suma y Resta de Fracciones

Una fracción es un número que expresa una cantidad determinada de porciones que se toman de un todo dividido en partes iguales.



$$\frac{2}{6}$$

numerador

denominador

Suma y Resta de Fracciones

1. $$\frac{2}{6}+\frac{1}{3}$$

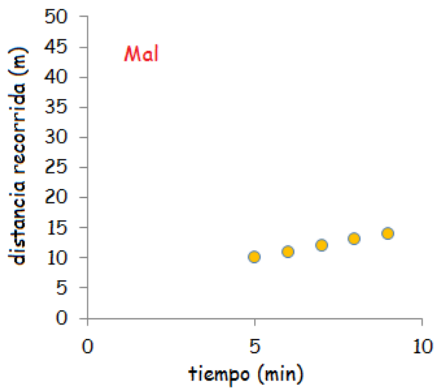
2. $$\frac{2}{6}+\frac{1}{3}=\frac{\quad}{\quad}$$

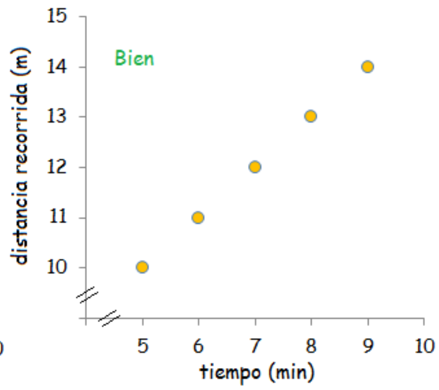
3. $$\frac{2}{6}+\frac{1}{3}=\frac{\quad}{6\times 3}=\frac{\quad}{18}$$

4. $$\frac{2}{6}+\frac{1}{3}=\frac{6+6}{18}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$

Aprendiendo a "Graficar"

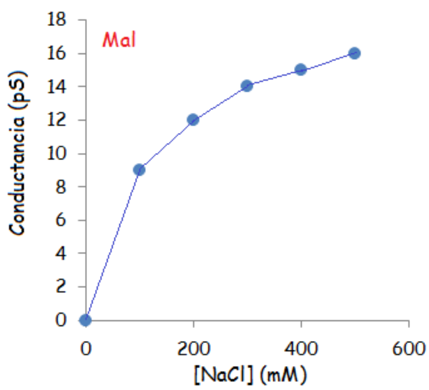
Elección y maximización de la escala

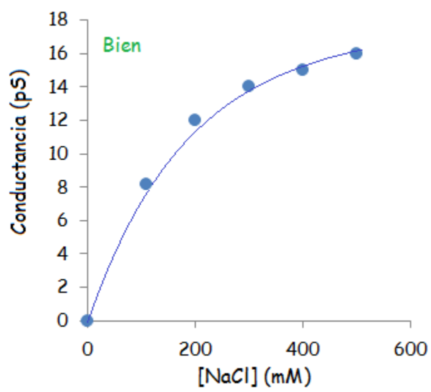




Aprendiendo a "Graficar"

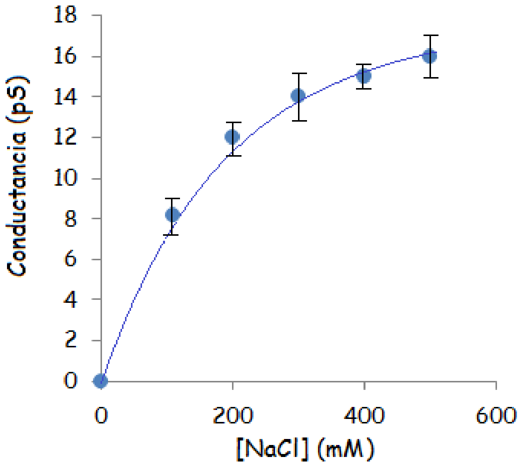
Para aproximar o trazar una línea de tendencia de una función, no deben unirse los puntos experimentales por medio de segmentos rectos. La línea de tendencia debe construirse con una curva suave, con la forma que mejor se aproxime a los puntos experimentales (ver Fig.).



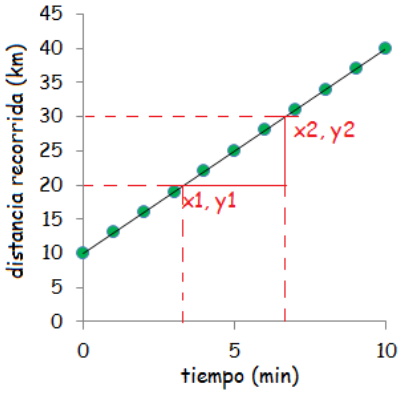


Aprendiendo a "Graficar"

Si los datos experimentales se grafican con su error (lo que veremos en Bioestadística), se grafica el error de la variable dependiente, como una barra hacia arriba y abajo del valor experimental promedio, cuya altura indicará la magnitud del error asociado a las mediciones en ese punto.



Cálculo de la Pendiente de una Recta



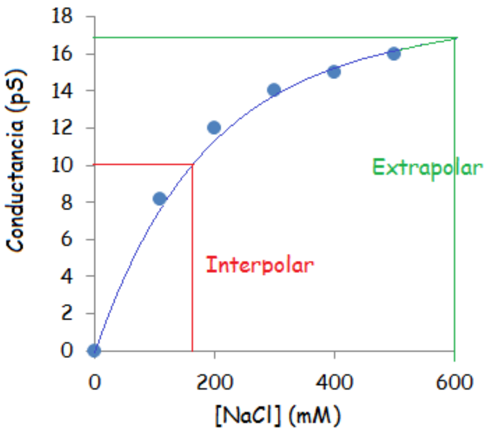
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} = \frac{(30 - 20)\ \text{km}}{(6{,}7 - 3{,}3)\ \text{min}} = \frac{10\ \text{km}}{3{,}4\ \text{min}} = 2{,}94\ \text{km/min}$$

Interpolación vs. Extrapolación

Cuando buscamos un valor de "y" para un determinado valor de "x" dentro del rango medido (que va de cero a 500 mM en este caso), estamos interpolando.

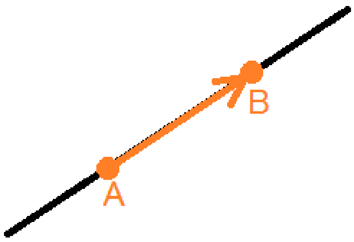
Cuando se busca el valor de "y" para un valor de "x" fuera del rango medido, se extrapola, asumiendo que la función seguirá la tendencia de los datos previamente obtenidos.



Vectores

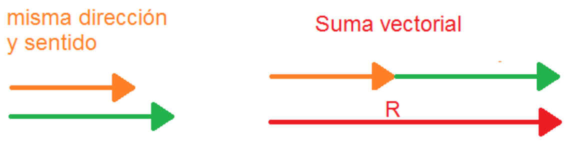
Se llama **vector** al segmento de recta (orientado) que representa a una magnitud con dirección y sentido, además de su valor numérico.

El vector es una forma gráfica de mostrar una cantidad vectorial, que tiene magnitud, dirección, y sentido. La velocidad y la aceleración son cantidades vectoriales, lo mismo que el peso, etc.



Elegimos dos puntos sobre una recta que llamamos A y B, siendo A el origen y B el extremo (hacia dónde apunta la flecha). Entonces, tenemos un segmento orientado, es decir, un **vector**. El sentido está dado por la flecha, mientras que la dirección está dada por la recta. El vector, que llamaremos AB es entonces una magnitud vectorial.

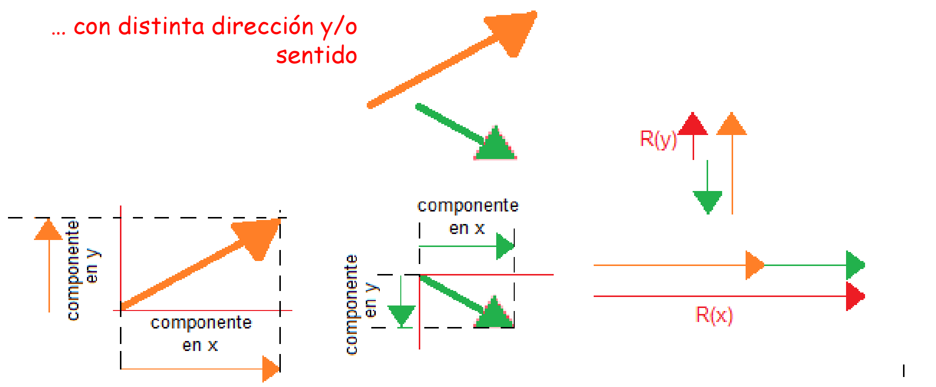
Suma de Vectores



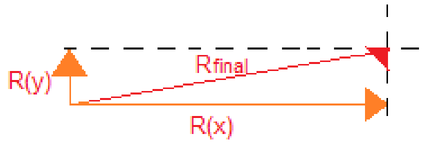
Si el vector naranja tuviera un módulo de 3 y el verde, 4, entonces el módulo resultante sería simplemente la suma de los dos, con un valor de 7.

Si el vector naranja tuviera un módulo de 4 y el verde, 3, entonces el módulo resultante sería simplemente la suma de los dos, con un valor de 1.

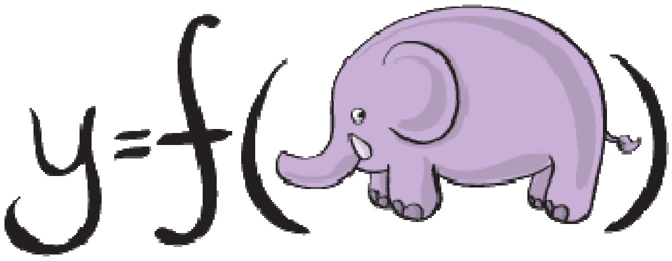
Suma de Vectores



Una vez obtenidas las resultantes en *x* (R(x)) y en *y* (R(y)), lo que hacemos es colocarlas de forma ortogonal, y sacamos la resultante final como se muestra en la Figura:



BIOFÍSICA



Clase 2.
Unidad 1. Funciones
Curso de Ingreso a FCM-UNSE, 2017

Ejemplo de Función

Una tabla numérica representa una relación entre dos o más variables. Ejemplo, el Índice de Masa Corporal (**IMC**) en función de la **Edad.** En general hay una variable dependiente, y = IMC, y una variable independiente que es x = Edad). La relación se representa como una función

$$y = f(x).$$

Aquí se representan dos funciones, una de varones y otra para mujeres.

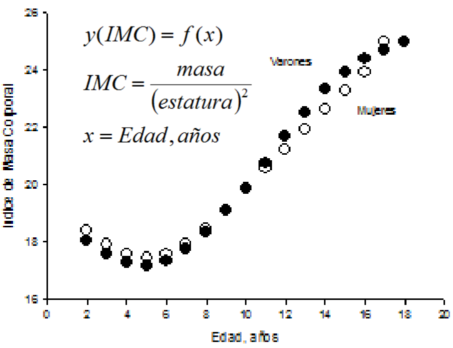
	IMC SOBREPESO	
Edad	Chicos	Chicas
2	18.41	18.02
3	17.89	17.56
4	17.55	17.28
5	17.42	17.15
6	17.55	17.34
7	17.92	17.75
8	18.44	18.35
9	19.10	19.07
10	19.84	19.86
11	20.55	20.74
12	21.22	21.68
13	21.91	22.5
14	22.62	23.34
15	23.29	23.94
16	23.90	24.37
17	24.46	24.70
18	25	25

Ejemplo de Función

La tabla numérica del ejemplo representa la relación que hay entre el Índice de Masa Corporal (**IMC**) y la **Edad**, como se observa en el gráfico. Esta relación se representa como una función

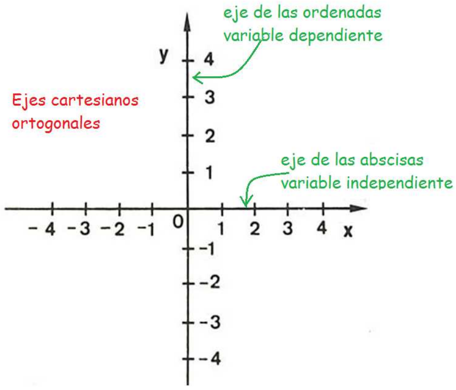
$$y = f(x)$$

Cuyo formato se puede explicar por la definición de las variables.



Funciones

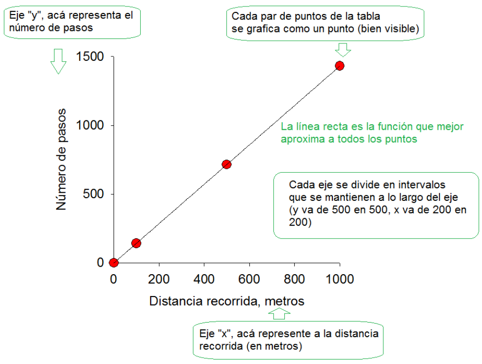
Las funciones son relaciones entre una variable y otra. A la variable que es independiente la llamaremos "x", y a la variable que depende de x, la llamaremos "y". Comúnmente los datos fisiológicos los verán graficados en ejes cartesianos ortogonales, donde la variable x es el eje de las abscisas y la variable y el de las ordenadas.



Función Lineal

La función lineal es aquella descripta por una línea recta. Por ejemplo: Un estudiante de Ciencias Médicas asistió al curso de ingreso. Para llegar hasta el aula caminó de forma constante desde su casa hasta la Facultad. Contó los pasos que dio para recorrer la distancia que separa su casa desde la Facultad, y registró en su cuaderno los valores de la siguiente tabla:

Distancia, metros	Cantidad de pasos
0	0
100	143
500	715
1000	1430



Función Lineal

Matemáticamente escribiremos la función lineal como:

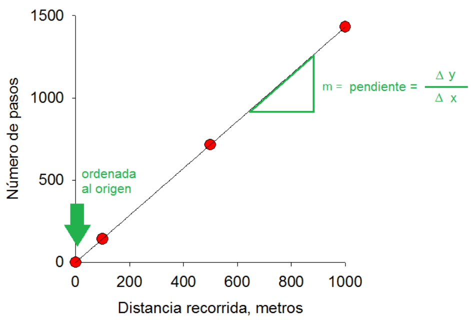
$$\boxed{y = m \times x + b}$$

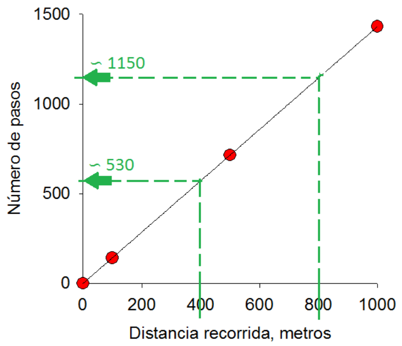
Donde "*m*" recibe el nombre de pendiente de la recta, y *b* representa la ordenada al origen.

En nuestro ejemplo puntualmente podríamos reemplazar *x* (variable independiente) e *y* (variable dependiente) por lo que verdaderamente representan:

$$\boxed{N° \; de \; pasos = m \times distancia \; recorrida + b}$$

Función Lineal



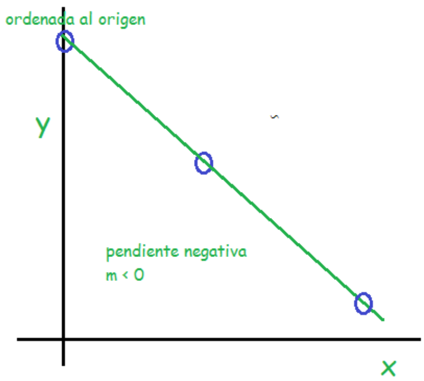


En este caso, si quisiéramos calcular *m*, interpolaríamos en el gráfico (líneas verdes) dos puntos cualesquiera que caigan sobre la recta: en este caso elegimos x_1 = 400 y x_2 = 800, y nos fijamos los valores que les correspondes en *y*, que serían y_1 = 530, y_2= 1150. De este modo, calculamos $m = \Delta y/\Delta x$, como sigue

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(1150 - 530)\, pasos}{(800 - 400)\, metros} \qquad m = \frac{620\, pasos}{400\, metros} = \frac{620\, pasos}{400\, metros} = 1{,}55\, \frac{pasos}{metro}$$

Función Lineal

En general, si la función tiene una pendiente negativa, el gráfico será como el que se muestra a continuación.

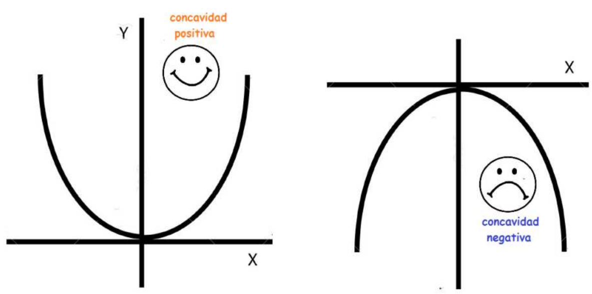


Función Cuadrática

Una función es cuadrática cuando la variable independiente *x* tiene como exponente máximo el número 2. De forma general, la **ecuación cuadrática** se escribe:

$$y = ax^2 + bx + c$$

donde *a*, *b* y *c* son constantes. Lo que nos da una **parábola**. Si $a > 0$, la **parábola** es positiva, si $a < 0$, ocurre lo contrario.



Función Cuadrática

Un estudiante quiere poner mosquiteros en cuatro de las ventanas (cuadradas) de su casa. Todas las ventanas tienen diferente tamaño. Para ello mide la longitud de uno de los lados de cada una. Luego, sabiendo que el área de un cuadrado es A = (Lado)^2, y calcula el área de mosquitero que debe colocar. Obtiene los siguientes valores

longitud, cm	Área, cm^2	Área x10^3, cm^2
50	2500	2,5
100	10000	10
120	14400	14,4
150	22500	22,5

$$\acute{A}rea = a \times longitud^2 + b \times longitud + c$$

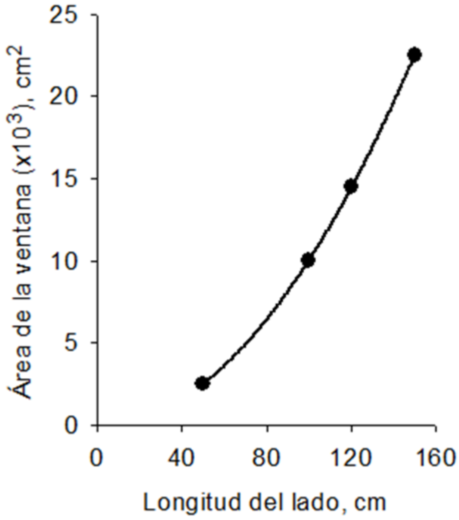
Sólo que en el caso más sencillo de la ecuación cuadrática, que es el que hemos graficado, *a* = 1, y *b* y *c*, valen cero, obteniendo entonces simplemente:

$$\acute{A}rea = longitud^2$$

Función Cuadrática

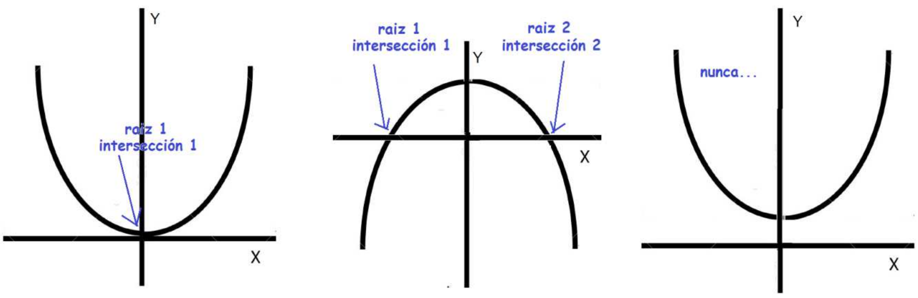
Luego, se grafican los valores, obteniéndose el gráfico que se observa a la derecha. Nótese que la función para este caso podría escribirse como:

$$Área = longitud^2$$



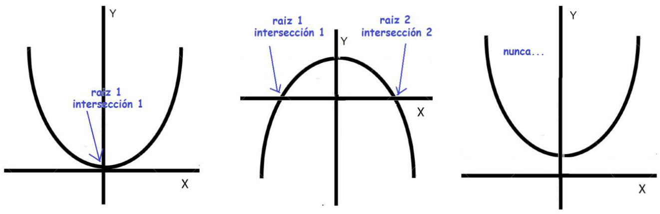
Función Cuadrática

Dependiendo de la función, las parábolas pueden intersectar al eje x una o dos veces, o nunca. Veamos algunas posibilidades:



A esos valores de *x*, que corresponden a un valor de *y* = 0, se los llama **raíces** de la función.

Función Cuadrática



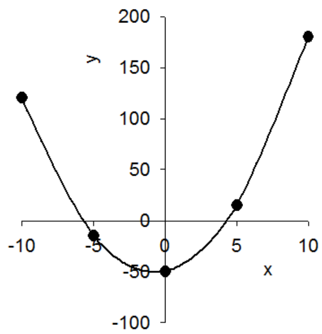
Las raíces pueden calcularse como

$$x_{raíz} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \times a \times c}}{2 \times a}$$

Ejemplo

Ejemplo: Dada la función $y = 2x^2 + 3x - 50$, confeccionar el gráfico para valores de x entre -10 y 10 y hallar analíticamente las raíces de la función. Primero, vamos a confeccionar la tabla, y luego la graficaremos en un par de ejes cartesianos:

x	$y = 2x^2 + 3x - 50$
-10	120
-5	-15
0	-50
5	15
10	180



Reemplazamos:

$$x_{raiz} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times (-50)}}{2 \times 2}$$

$$x_{raiz} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 400}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 400}}{4}; x_2 = \frac{-3 - \sqrt{9 + 400}}{4}$$

$$x_1 = 4{,}3;\ x_2 = -5{,}8$$

Polinomios

Un polinomio es una función que matemáticamente se describe como:

$$y = a \times x^n + b \times x^{n-1} + \cdots + c$$

Por ejemplo, la función:

$$y = 2 \times x^3 + 3 \times x^2 + x + 10$$

es un polinomio. Nótese que si el coeficiente que multiplica a x en alguno de los términos es cero, el término mismo se recude a cero. Por ejemplo,

$$y = 2 \times x^3$$

es un polinomio donde el término cuadrático, el lineal y la constante, tienen por valor cero.

Función Exponencial

La función exponencial es aquella de la forma

$$\boxed{y = a^x}$$

Donde *a* es una constante de valor mayor que cero, y la variable independiente *x*, es un exponente. Serán de particular interés, las funciones en las que

$$\boxed{a = e}$$

donde "e" es el número de Euler, un número irracional que se toma como la base de los logaritmos neperianos

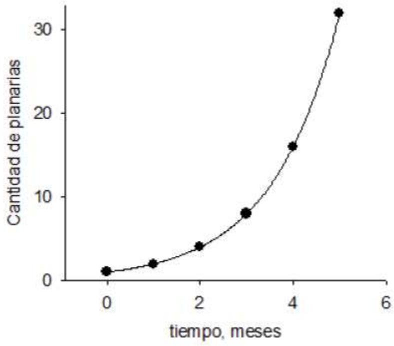
$$e \approx 2{,}718\ldots$$

Ejemplo

Las planarias son "gusanos" planos (estrictamente, son platelmintos no parásitos de la familia Planariidae, orden Seriata), que se reproducen asexualmente dividiéndose en dos. Supongamos que las condiciones de su hábitat son tales que las planarias se duplican aproximadamente cada mes, y que inicialmente sólo hay una planaria. Calcular el número de planarias que habrá según pasan los meses.

$$y = 2^x$$

Tiempo, meses	Cantidad de planarias
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16



Función Logarítmica

Una función logarítmica es aquella que se expresa matemáticamente como

$$y = log_a x$$

El formato típico de una función logarítmica responde al concepto de logaritmo de un número (x) como un exponente (y) al que elevamos siempre la misma base (a) de forma que:

$$x = a^y$$

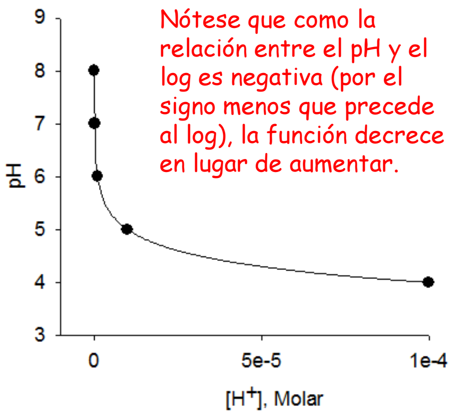
Función Logarítmica

Veamos un ejemplo útil de la Fisiología Humana. Una forma de medir la acidez es medir el pH. La relación entre el pH y la concentración de protones es una función logarítmica en base 10, es decir:

$$pH = -\log_{10}[H^+]$$

Siendo, $[H^+]$ la concentración de protones. Para las siguientes $[H^+]$, se obtuvieron los siguientes pH.

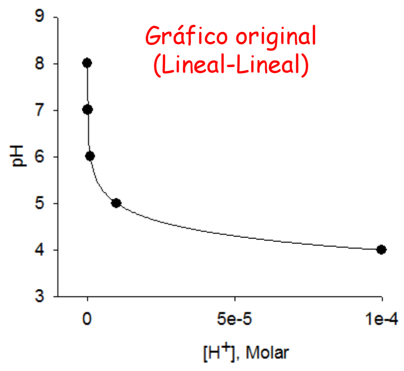
$[H^+]$, Molar	pH
1×10^{-4}	4
1×10^{-5}	5
1×10^{-6}	6
1×10^{-7}	7
1×10^{-8}	8

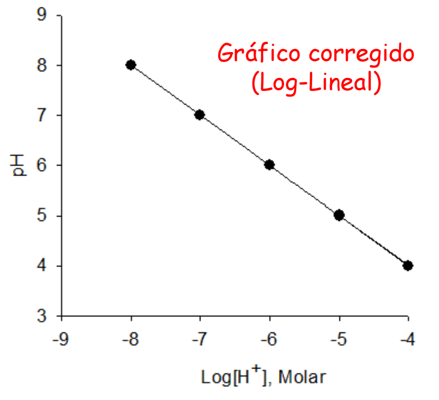


Nótese que como la relación entre el pH y el log es negativa (por el signo menos que precede al log), la función decrece en lugar de aumentar.

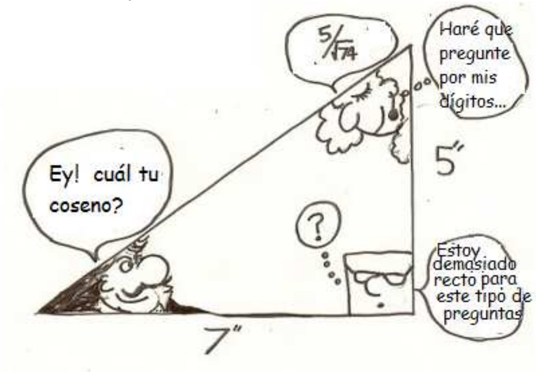
Función Logarítmica

Es muy útil en casos como este, realizar el gráfico "linealizando" la función (esto quiere decir, hacer una transformación de los ejes para que el gráfico se vea lineal). Para ello, lo que hacemos es convertir al eje *x* en una escala logarítmica, obteniendo lo siguiente:





BIOFÍSICA



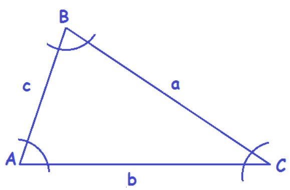
Clase 3.

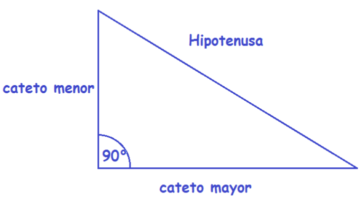
Unidad 1. Nociones de Trigonometría

Curso de Ingreso a FCM-UNSE, 2017

Triángulos

Un triángulo es un polígono de tres lados. Un triángulo, tiene las siguientes características

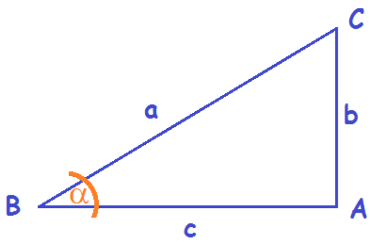




A todo triángulo rectángulo se aplica el Teorema de Pitágoras que dice que el cuadrado de la hipotenusa (*H*) es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los catetos. Esto puede escribirse como

$$\boxed{H^2 = (Cateto_1)^2 + (Cateto_2)^2}$$

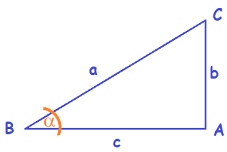
Razones Trigonométricas



$$\frac{b}{a};\frac{c}{a};\frac{b}{c};\frac{c}{b};\frac{a}{c};\frac{a}{b}$$

Tomaremos como referencia al ángulo agudo α. Para este ángulo, el cateto *b* se opone al vértice B, y se llama cateto opuesto, el cateto *c*, que está contiguo al vértice B, es el cateto adyacente.

Razones Trigonométricas



$$\cos\alpha = \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\sin\alpha = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} = \frac{b}{a} \qquad tg\alpha = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

$$cotg\alpha = \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{cateto opuesto}} = \frac{c}{b} \qquad cosec\,\alpha = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

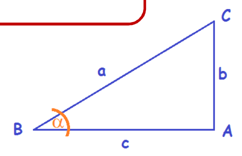
$$\sec\alpha = \frac{\textit{hipotenusa}}{\textit{cateto adyacente}} = \frac{a}{c}$$

Siendo, *sin* = seno; *cos* = coseno; *tg* = tangente; *cotg* = cotangente; *sec* = secante; *cosec* = cosecante.

Identidades Trigonométricas

$$sin\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \times sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \times \cos\alpha$$



Teniendo en cuenta el Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

si reemplazamos por las igualdades que obtuvimos anteriormente

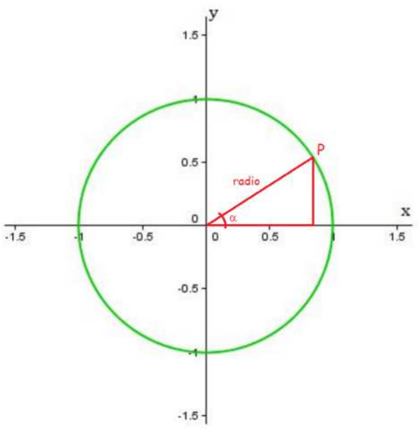
$a^2 = a^2 \sin^2\alpha + a^2 \cos^2\alpha$ y dividimos por a^2, resulta: $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

Por último, otra identidad importante es la siguiente. Si hacemos el cociente entre el seno y el coseno del ángulo α, resulta:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b \times a}{c \times a} = \frac{b}{c} = tg\,\alpha$$

Funciones Seno y Coseno

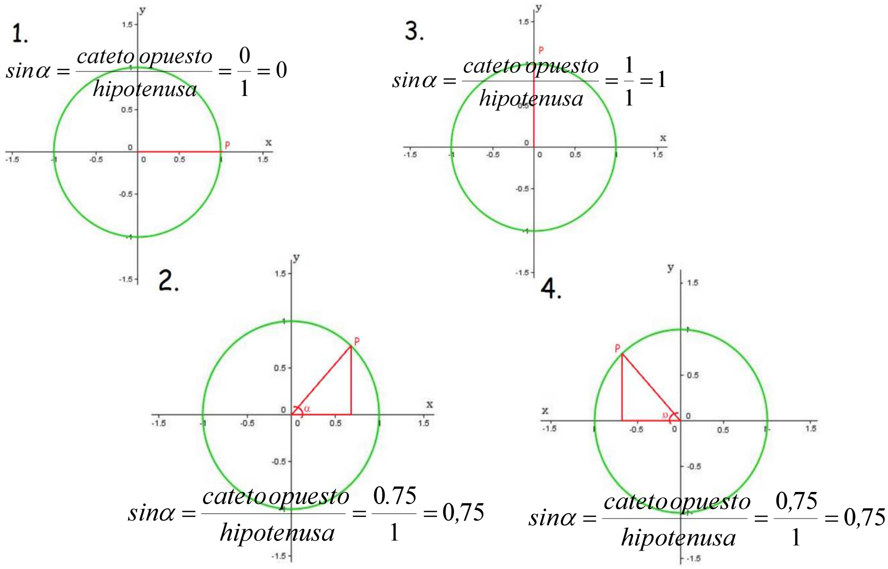
El círculo que dibujamos es de radio igual a 1, el perímetro de este círculo es 2π.



$$sin\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

Nótese, que al ir variando la posición del punto P, iremos definiendo triángulos de diferentes tamaños, aquí se muestran algunos a modo de ejemplo. Todos ellos, tienen una hipotenusa de radio 1 (dado que la distancia de P al centro es siempre el valor del radio).

Función Seno



1. $sin\alpha = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \dfrac{0}{1} = 0$

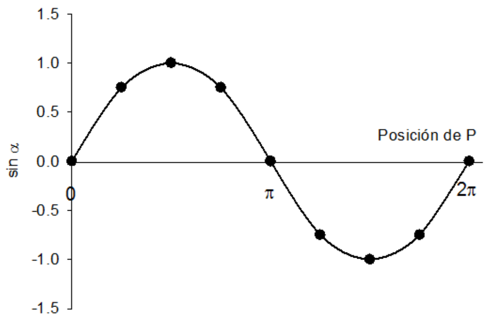
2. $sin\alpha = \dfrac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} = \dfrac{0.75}{1} = 0{,}75$

3. $sin\alpha = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \dfrac{1}{1} = 1$

4. $sin\alpha = \dfrac{cateto\,opuesto}{hipotenusa} = \dfrac{0{,}75}{1} = 0{,}75$

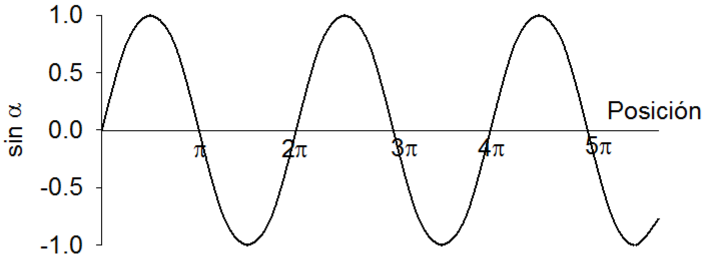
Función Seno

Posición del punto P en la circunferencia	sin α
0/4 π	0
1/4 π	0,75
1/2 π	1
3/4 π	0,75
4/4 π	0
5/4 π	-0,75
3/2 π	-1
7/4 π	-0,75
8/4 π	-1



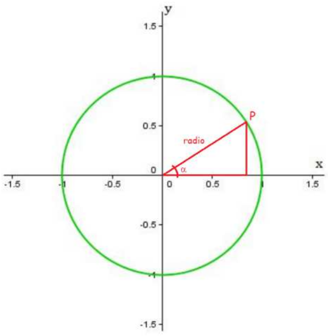
Función Seno

Esta función se dice que es periódica, dado que si siguiéramos dando vueltas sobre el círculo repetiríamos la función infinidad de veces, obteniendo algo así:



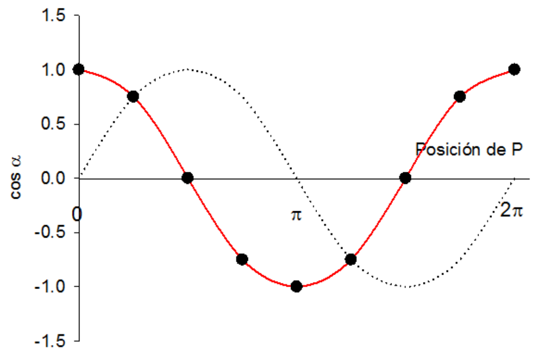
Función Coseno

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$



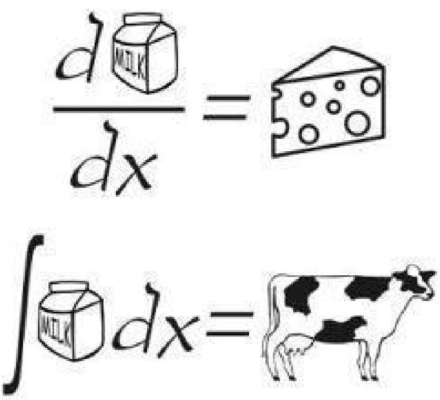
Posición del punto P en la circunferencia	cos α
0/4 π	1
1/4 π	0,75
1/2 π	0
3/4 π	-0,75
4/4 π	-1
5/4 π	-0,75
3/2 π	0
7/4 π	0,75
8/4 π	1

Función Coseno



La línea punteada muestra la función seno que mostráramos antes. Noten que la función seno y coseno están desfasadas en ½ π, lo que equivale a decir que están desfasadas 90°. Al igual que la función seno, es una función periódica.

BIOFÍSICA



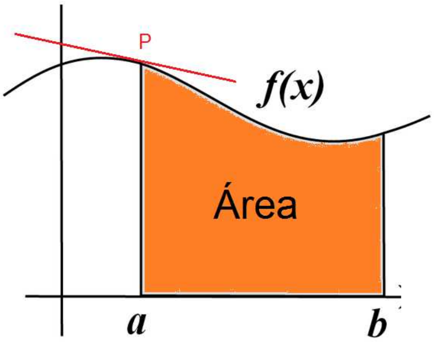
Clase 4.

Unidad 1. Derivadas e Integrales

Curso de Ingreso a FCM-UNSE, 2017

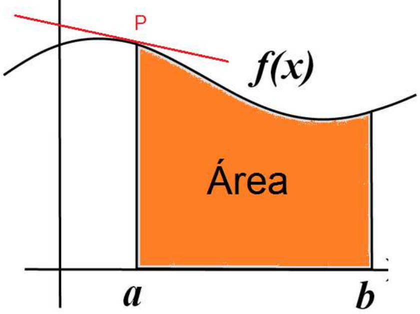
Nociones de Derivadas e Integrales

Las derivadas y las integrales son herramientas fundamentales del cálculo, que permiten modelar todos los aspectos de la naturaleza en las ciencias físicas.



Nociones de Derivadas e Integrales

De la forma más sencilla posible, podemos interpretar geométricamente a la derivada de una función en un punto P, como la pendiente de la recta tangente que toca a la función en el punto (en este ejemplo, la pendiente de la recta roja). A su vez, podemos ver a la integral de una función como el área que queda encerrada debajo de dicha función (área anaranjada), en este caso entre los puntos *a* y *b*.



Derivadas

Para el estudio de una función, es útil observar si es positiva o negativa, si crece o decrece, y la marcha del movimiento, o sea "la velocidad de la curva". Lo que necesitamos saber es el **cociente incremental**

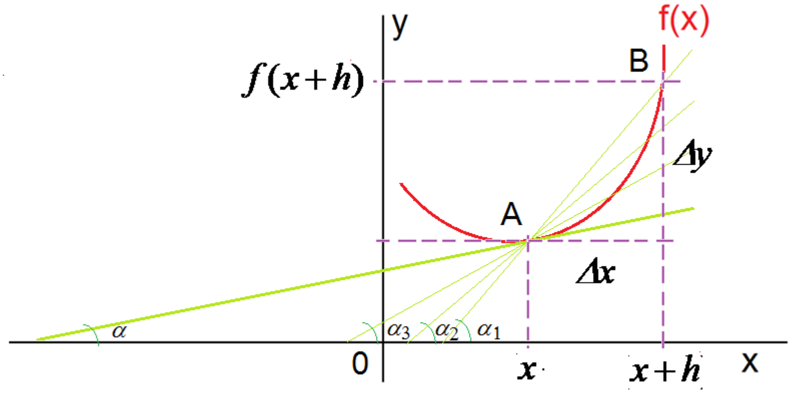
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

que se produce en la función con un cambio en la variable independiente. la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto.

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La pendiente, en otras palabras, es una medida del valor en que se incrementa la variable dependiente "y" al incrementarse la variable independiente "x".



El cociente incremental en el punto x es la pendiente de la recta que une los puntos A y B, y tienen abscisas x y $(x + h)$, y forma el ángulo α_1 en el eje x. Este valor es la pendiente media que tiene un valor aproximado, dado que no sigue todos los cambios de la función.

Reduciendo el incremento de la variable, al incremento más chico posible, llegamos al límite. El resultado es la derivada de la función en el punto x.

Definición de Derivada

La derivada en un punto es el límite alcanzado por el cociente incremental en ese punto, cuando el incremento de la variable tiende a cero. La derivada de *y = f(x)* en el punto *x*, se expresa como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Y también por las notaciones

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Desde un punto de vista geométrico, al ir disminuyendo el valor de *h* las sucesivas razones incrementales para los ángulos α_1, α_2, α_3 valen tg α_1, tg α_2, … tg α_n, que tienen como límite la tg α. Por lo tanto,

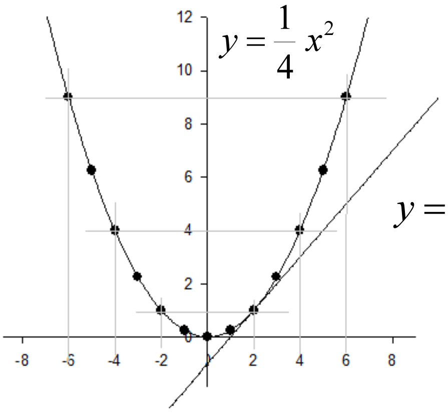
$$\boxed{f'(x) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\ \alpha}$$

Definición de Derivada

De manera resumida se puede decir que la derivada es la pendiente de la tangente geométrica. Esto es de suma utilidad para el cálculo de máximos y mínimos.

$$f'(x) = tg\ \alpha$$

x	y
0	0
2	1
4	4
6	9
-2	1
-4	4
-6	9



$$y = \frac{1}{4}x^2$$

$$y = x - 1$$

Definición de Derivada

$$f'(x) = tg\ \alpha$$

Función

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

Derivada

$$y' = \frac{2}{4}x$$

o bien

$$y' = \frac{1}{2}x$$

... y en el punto P (2, 1)

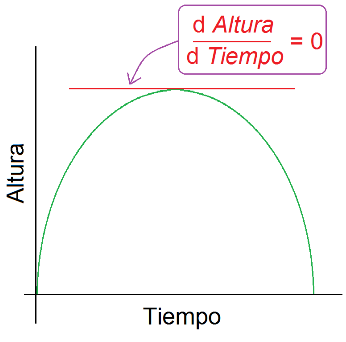
$$y' = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

Luego la recta tangente a la curva en el punto P (2, 1), tendrá una ecuación

$$y - 1 = 1 \times (x - 2)$$ ... y por lo tanto, $$y = x - 1$$

Cálculo de Máximo y Mínimo

La determinación de los valores máximos y mínimos de una función, es una de las utilidades que podemos encontrar en las derivadas. Tomemos *f(x)* como una función de *x*. Tomemos como ejemplo la altura de un proyectil que se dispara en línea recta.



El punto de inflexión se alcanza cuando la derivada de la función es igual a cero. Este punto coincide con aquel donde la pendiente de la recta tangente (recta roja) es igual a cero.

Cálculo de Derivadas Útiles

Derivada de una constante

Función $y = k$

El incremento de la función es nulo por ser *y* constante, luego, para $\Delta x = h$,

$$\Delta y = 0$$

… y en consecuencia

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{h}$$

O sea,

Derivada

$$y' = 0$$

Cálculo de Derivadas Útiles

Derivada de la variable independiente

Función

$$y = x$$

La función es igual al argumento *x*, luego el incremento de la función es igual al de la variable, es decir

$$\Delta y = \Delta x$$

… y por lo tanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \quad \rightarrow$$

Derivada

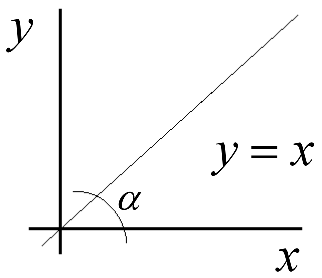
$$y' = 1$$

Si la función es $y = k\,x \rightarrow y' = k$

Cálculo de Derivadas Útiles

Derivada de la variable independiente

Función $y = x$



La derivada de la función identidad es igual a 1.

$$f'(x) = y' = tg\ \alpha = tg\ 45° = 1$$

Cálculo de Derivadas Útiles

Derivada de una potencia

Función $y = x^m$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+h)^m - x^m}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + mx^{m-1}h + C_{m,2}x^{m-2}h^2 + \cdots h^m) - x^m}{h}$$

Reduciendo el primer y último término del numerador, y dividiendo por h, tenemos que

$$\boxed{y' = mx^{m-1}}$$

Cálculo de Derivadas Útiles

Derivada de una raíz

Función $y = \sqrt[m]{x}$ o sea ... $y = x^{\frac{1}{m}}$

La derivada de una raíz es un caso particular de derivada de potencia

$$y' = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} = \frac{1}{m} x^{\frac{m-1}{m}} = \boxed{\frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}}$$

Cálculo de Derivadas Útiles

Derivada del producto de una constante por una función

Función $y = k\,f(x)$

Siendo *k* una constante, el cociente incremental será

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k(x+h) - kf(x)}{h} = k\frac{(x+h) - f(x)}{h}$$

Cuyo límite será

$$\boxed{y' = k\,f'(x)}$$

Cálculo de Derivadas Útiles

Derivada del logaritmo neperiano

Función $y = \log_e(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_e(x+h) - \log_e x}{h}$$

Pero como la diferencia de logaritmos es el logaritmo de un cociente,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_e \frac{x+h}{x}}{h} = \frac{1}{h}\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right) \qquad \boxed{y' = \frac{1}{x}}$$

Resumen de Derivadas

Función	Derivada	Nota
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	La derivada de cualquier constante (k), es cero
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	La derivada de x siempre vale 1
$f(x) = k \times x$	$f'(x) = k$	La derivada de una constante multiplicada por x es el valor de la constante
$f(x) = g(x) + h(x)$	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$	La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de la derivada de cada función
$f(x) = k \times g(x)$	$f'(x) = k \times g'(x)$	La derivada de una función multiplicada por un valor constante (k), es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \times x^{n-1}$	Para cualquier función de x elevada a la "n", la derivada es igual a multiplicar por n a x elevada a (n-1).
$f(x) = ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	La derivada de e elevada a la x, es la misma función
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \times ln(a)$	
$f(x) = sin(x)$	$f'(x) = cos(x)$	
$f(x) = cos(x)$	$f'(x) = -sin(x)$	

Concepto de Diferenciación

Si la función $y = f(x)$

La derivada de la función es

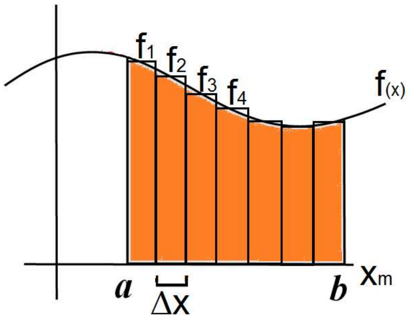
$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{dy}{dx}$$

… entonces, la **diferencial** de la derivada, va a ser,

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx}$$

que se interpreta como que el cambio diferencial de la función, *dy*, es el producto de la derivada de esa función, *f´(x)*, por el diferencial de la variable, *dx*. Esta definición nos permite definir el cálculo integral.

Área Bajo la Curva



El área bajo la curva formada entre la función *f(x)* y el eje x se puede obtener en forma aproximada sumando rectángulos de anchura finita y altura f_i igual al valor de la función en el centro del intervalo elegido.

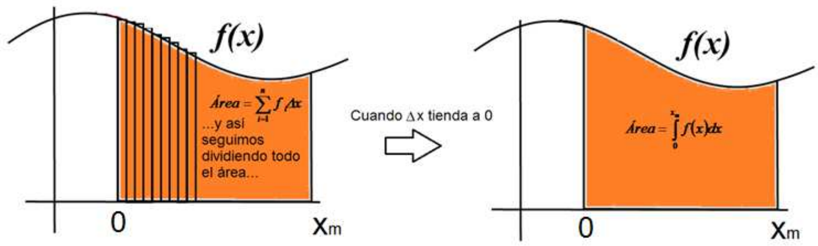
$$Área = \sum_{i=1}^{n} f_i \, \Delta x$$

Es decir, el área bajo la curva es la suma de los rectángulos producto del valor de la altura del rectángulo por la longitud Δx del intervalo.

Cuánto más pequeño sea el intervalo en *x*, mayor será el número de rectángulos internos, y más nos aproximaremos al área real bajo la curva. En el límite, cada rectángulo tendrá el ancho de un punto, su derivada en ese punto.

Integral como Límite del Área

Incrementaremos el número de rectángulos (N) hacia el infinito, tomando el límite cuando el ancho del rectángulo tiende a cero.

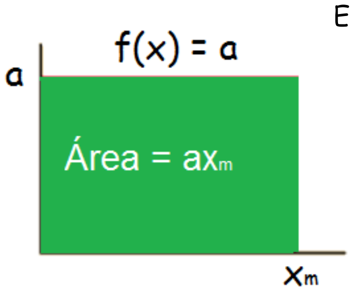


$$Área = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\Delta x = \int_0^{x_m} f(x)dx$$

Esto quiere decir que el área será igual a la integral $\int_0^{x_m}$ de la función respecto de *x*, equivalente a decir que es igual al límite de la suma de la función en cada punto multiplicado por el intervalo de *x* elegido.

Ejemplos de Integral de Área

Algunos ejemplos pueden reforzar la idea de la integral como el área bajo una curva. Para una función que es una constante que llamaremos "a", el área formada por la función es exactamente un rectángulo.



El área del rectángulo, puede calcularse como:

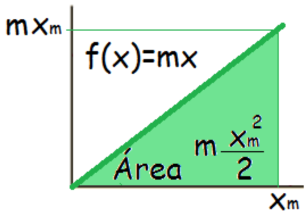
$$Área = a \times x_m = Integral$$

$$Integral = \int_0 f(x)dx = \int_0 a\,dx$$

Nótese que el valor "a" es una constante, que sería la derivada de una recta, cuya pendiente era de valor a. La integración es la función inversa de la diferenciación (y viceversa) !!!!.

Ejemplos de Integral de Área

En una función *f(x) = mx*, es decir una función lineal, el área que queda definida entre el origen y el punto que llamamos x_m es un triángulo. Por lo tanto, podemos igualar a esta integral al valor del área de un triángulo, que es (base x altura)/2.



Dado que la base tiene un valor igual a x_m, y la altura tiene un valor igual a mx_m, decimos que:

$$Área = \frac{(x_m)\times(m\times x_m)}{2} =$$

$$\int_0^{x_m} f(x)dx = \int_0^{x_m} (m\times x)dx = m\frac{x_m^2}{2}$$

De forma general, la integral de cualquier polinomio se puede escribir como:

$$\int_0^x (m\times x^n)dx = m\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

Ejemplos de Integrales

$$\int dx = x + C$$

$$\int k\ dx = k\times x + C$$

$$\int \frac{1}{x}dx = ln(x) + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)} + C$$

$$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$$

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$$

BIOFÍSICA

Clase 5
Unidad 1. Bioestadística
Curso de Ingreso a FCM-UNSE, 2017

Mediciones

El estudio de la vida cotidiana y de la ciencia implica realizar mediciones, el resultado de estas es la medida.

La medición es el proceso consistente en comparar un objeto o una magnitud física con un patrón previamente seleccionado.

La Medición puede ser directa o indirecta.

La Medición Directa es aquella que se obtiene a partir de la simple lectura de un instrumento de medición, por ejemplo, la hora en un reloj.

La Medición Indirecta es la medida que resulta de una operación matemática. Muchas magnitudes físicas se definen como el resultado de una operación matemática, por ejemplo la superficie de un lote.

Mediciones

En la actualidad existen el Sistema Inglés de unidades y el Sistema Internacional del cual proviene el sistema que usamos en nuestro país, llamado SIMELA (Sistema Métrico Legal Argentino).

MAGNITUD	UNIDAD	SIMBOLO
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Longitud	metro	m
Volumen	metro cúbico	m^3
velocidad	metro/segundo	m/s

Mediciones

Es común acompañar a la unidad (valor numérico) de medida, con un prefijo que denota el orden de magnitud de la medida. Por ejemplo en las palabras kilómetros y kilogramos, usan el prefijo kilo, que equivale a multiplicar la unidad por el valor 10^3 (1000).

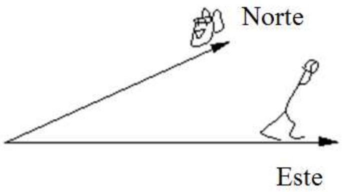
Factor	Prefijo	Símbolo
10^{24}	Yotta	Y
10^{21}	Zetta	Z
10^{18}	Exa	E
10^{15}	Petta	P
10^{12}	Tera	T
10^{9}	Giga	G
10^{6}	Mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	µ
10^{-9}	nano	n
10^{-10}	Amstrong (no es un prefijo)	Å
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

Magnitudes Escalares y Vectoriales

Las Magnitudes las dividiremos en:

Magnitudes escalares: son aquellas cuya medida es un escalar, esto es un número con su unidad. Ejemplos son: la longitud, masa, superficie, volumen, densidad, entre otras.

Magnitudes vectoriales: son aquellas cuyas medidas son vectores, es decir que se debe indicar de ellas la intensidad, la dirección, sentido y dónde están aplicadas.



Determinismo vs. Azar

Cuando un sistema es determinístico, a todo efecto le corresponde una causa. La mayoría de las leyes físicas son deterministas. Ejemplos: la Ley de la gravedad y el Principio de Arquímedes, entre otros.

Cuando en un sistema actúan causas desconocidas que afectan su evolución, las predicciones son poco confiables. Para predecir esta clase de comportamientos, se recurre a dos ramas de la Matemática: el **cálculo de probabilidades** y la **estadística**. Ejemplo, la trayectoria exacta de una molécula de gas ideal en un recipiente.

La Estadística es una herramienta matemática que permite describir y tomar decisiones de riesgo calculado en sistemas afectados por la incertidumbre. La Bioestadística es el uso y la aplicación de la estadística en la Biología.

Nociones de Error

Siempre que medimos algo, cometemos errores en la medición. No importa cuán cuidados seamos, siempre cometeremos errores de algún tipo.

Estos errores pueden clasificarse en **sistemáticos** o **aleatorios**, siendo los primeros los únicos que podríamos evitar.

Un error sistemático es aquel que cometemos de forma constante y que afecta por igual a todas las mediciones. Por ejemplo, si medimos la temperatura corporal de 50 personas con un termómetro que mide siempre 1°C de más, todas las mediciones tendrán ese error.

Un error aleatorio es aquel que cometemos por obra del azar y que por su naturaleza estará siempre en todas las mediciones que realicemos.

Cuantificación de los Errores

Valor medido: Es aquel valor que se obtiene por medición y que, en el caso ideal, corresponderá al valor real de lo que queremos medir.

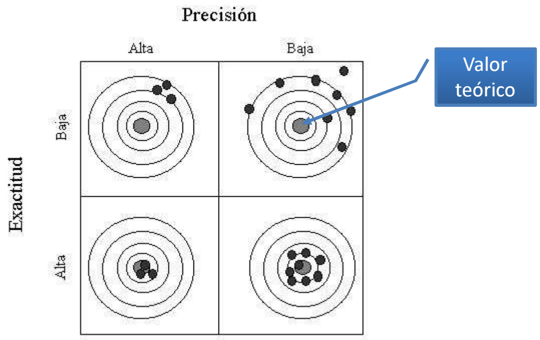
Error absoluto: Este error es la diferencia entre el valor real y el valor que medimos. Sólo cuando ambos valores sean idénticos el error absoluto será cero. En la práctica, excepto por comparación con patrones o estándares, es un error muy difícil de cuantificar.

Error relativo: Este error es el cociente entre el error absoluto y el valor real.

Sensibilidad de una Medición

Cualquier variable cuantitativa continua podría tener como valor cualquier número real, sin embargo, en la práctica estaremos limitados al aparato de medición. Por ejemplo, si una balanza sólo nos permite distinguir hasta la décima de kilogramo, podremos decir que nuestro pero es de 58,3 kg, pero no sabremos si la pesada fue 58,34 kg ó 58,32 kg, dado que la sensibilidad de la balanza no supera la primera posición decimal.

Precisión y Exactitud



Exactitud: Una medida es exacta, si el valor medido es idéntico al valor real (teórico).

Precisión: La precisión es inversamente proporcional al desvío estándar de las mediciones efectuadas. Cuánto más dispersos sean los datos alrededor de su media, más imprecisa será la medida.

Variables Estadísticas

Se llaman variables estadísticas aquellas magnitudes que están sujetas al azar (es decir, que no son determinísticas), y que pueden ser medidas y evaluadas estadísticamente; Pueden ser:

Cualitativas (como la nacionalidad, o el género)

Semicuantitativas (pequeño, mediano, grande)

Cuantitativas (aquellas que pueden tomar valores numéricos).

Las variables cuantitativas, pueden ser discretas, si toman como valor un número entero (por ejemplo, número de hijos), o continuas, si pueden tener cualquier valor intermedio (unidades decimales). Ejemplo el peso o su estatura de una persona .

Ejemplos

Cuantitativas → Discretas

Cuantitativas → Continuas

Discretas: Entre dos valores consecutivos no hay valores intermedios. Ejemplo: número de hijos (1; 2; 3; etc.)

Continuas: Puede haber infinitos valores entre dos valores cualesquiera. Ejemplo: altura (1,72 m; 1,73 m; etc. Puede haber infinitos valores entre 1,72 m y 1,73 m)

Definiciones Útiles

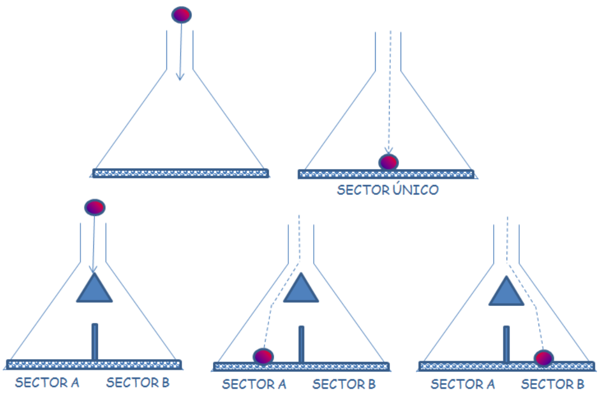
Población: Llamamos población al conjunto de todas las observaciones o medidas posibles. Por ejemplo, la estatura de todas las mujeres que habitan Santiago del Estero.

Muestra: Como en general hacer la medición de toda la población es muy dificultoso (en el ejemplo deberíamos reclutar a todas las mujeres de la provincia...), lo que se hace es tomar un muestra representativa de la población. La muestra es una porción de esa población. Por ejemplo, mediríamos la estatura de 1000 mujeres que habiten Santiago del Estero. La elección debe ser azarosa para que todos los individuos tengan las mismas probabilidades de ser elegidos.

Observación individual: Es cada uno de los valores por medición dentro de la muestra.

Distribuciones

(contribución del azar)

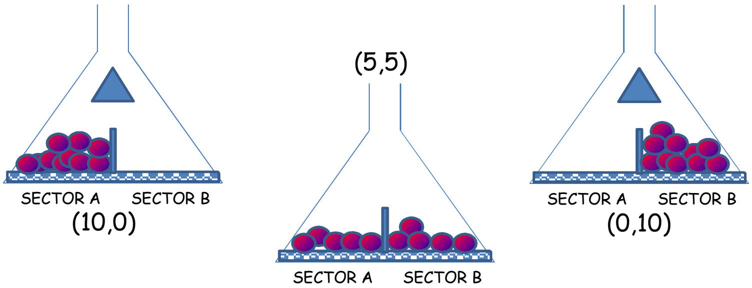


Si la estructura fuese perfectamente simétrica y lanzamos 10 bolillas, ¿Cómo se distribuirán las mismas entre los sectores A y B ?

Distribuciones

Hay 11 resultados posibles:

(10, 0) (9, 1) (8, 2) (7, 3) (6, 4) (5, 5) (4, 6) (3, 7) (2, 8) (1, 9) (0, 10)



Si repetimos el experimento aproximadamente mil veces (exactamente 1024 veces) ¿Ocurrirán todos los resultados con igual frecuencia?

(10,0)	(9,1)	(8,2)	(7,3)	(6,4)	(5,5)	(4,6)	(3, 7)	(2, 8)	(1, 9)	(0,10)
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

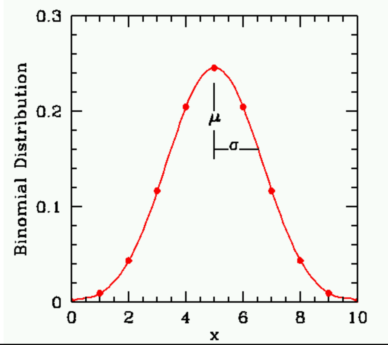
Distribuciones

Se repite el experimento de lanzar 10 bolillas 1024 veces

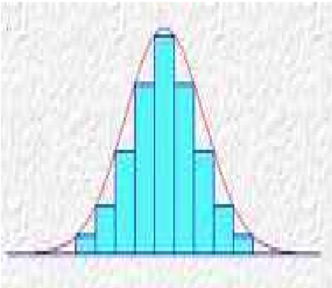
(10,0)	(9,1)	(8,2)	(7,3)	(6,4)	(5,5)	(4,6)	(3, 7)	(2, 8)	(1, 9)	(0,10)
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

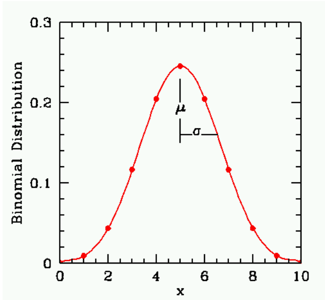
... Expresamos los resultados de forma relativa al total (1024 veces)

↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$



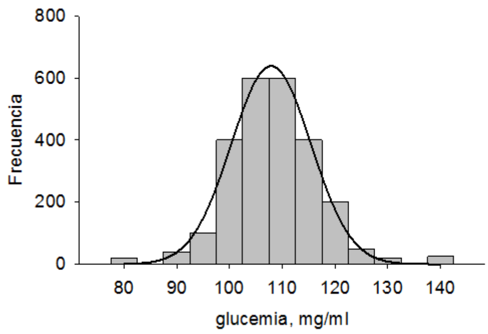
Distribuciones





- La distribución es simétrica respecto del centro y se la conoce como distribución normal o de Gauss
- La distribución normal se caracteriza por un parámetro central (el promedio o valor más probable aquí representado como μ) y un parámetro de dispersión (dispersión de probabilidades alrededor del promedio aquí representada como σ o desviación estándar)

Distribución Normal



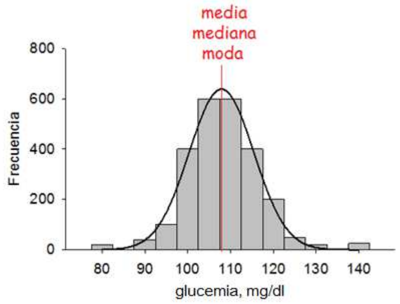
Las barras representan los valores medidos, y la línea negra continua representa la mejor aproximación a través de una función normal o Gaussiana.

Medidas de Centralización

Promedio o Media: $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Mediana: Llamamos mediana al valor central (si el tamaño de la muestra es impar), o al promedio de los valores centrales (cuando el tamaño de la muestra es par) de los valores ordenados de menor a mayor.

Moda: Aquel valor que se repite con mayor frecuencia.



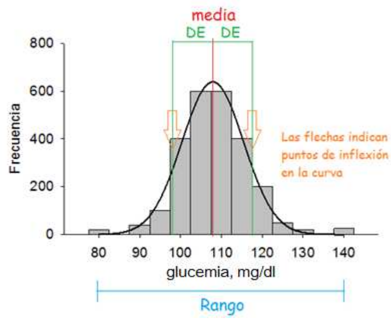
Para una población Normal, se observa que la media, la mediana y la moda tienen el mismo valor.

Medidas de Dispersión

Desvío estándar: Da una idea de cuán dispersos están los datos de la muestra o de la población. A mayor dispersión, mayor será el valor de la desviación estándar. Se calcula de la siguiente manera:

$$DE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{X}\right)^2}{n-1}}$$

Error estándar: Se calcula como: $EE = \frac{DE}{\sqrt{n}}$



Rango: Es la diferencia entre el valor máximo y mínimo

Ejemplo

Paciente	Presión arterial sistólica, mmHg
1	130
2	120
3	110
4	125
5	135

Cálculo del promedio de una variable continua:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

x_i = x_1 = 130 mmHg; x_2 = 120 mmHg; x_3 = 110 mmHg; x_4 = 125 mmHg; x_5 = 135 mmHg; n = 5

$$\overline{X} = \frac{(130+120+110+125+135)\,mmHg}{5} = \frac{620\,mmHg}{5} = 124\,mmHg$$

Ejemplo

Cálculo del desvío estándar:

$$DE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n-1}}$$

Primero obtendremos las diferencias de cada medición respecto de la media y calculamos el cuadrado de ese valor

Paciente	$(x_i - \bar{X})$, $mmHg$	$(x_i - \bar{X})^2$, $mmHg^2$
1	130 - 124 = 6	36
2	120 - 124 = -4	16
3	110 - 124 = -14	196
4	125 - 124 = 1	1
5	135 -124 =11	121

$$DE = \sqrt{\frac{(36+16+196+1+121)mmHg^2}{5-1}} = \sqrt{\frac{370\ mmHg^2}{4}} = 9{,}62\,mmHg$$

Guía de Ejercicios. Unidad 1: Matemática y Nociones de Bioestadística

Herramientas Básicas

1. Expresar en forma de potencias de 10 los siguientes números:

100.000 $=1 \times 10^{5}$
0,0001$=1 \times 10^{-4}$
24= $2{,}4 \times 10^{1}$
0,315$=3{,}15 \times 10^{-1}$
0,037$=3{,}7 \times 10^{-2}$
153$=1{,}53 \times 10^{2}$

2. Calcule usando notación científica:

$0{,}0021 \times 30.000.000 = 2{,}1 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{7} = 6{,}3 \times 10^{4}$
$0{,}000045 / 34.000 = 4{,}5 \times 10^{-5} / 3{,}4 \times 10^{4} = 1{,}32 \times 10^{-9}$
$560.000 / (8.900 \times 0{,}000058) =$
$=5{,}6 \times 10^{5} / (8{,}9 \times 10^{3} \times 5{,}8 \times 10^{-5}) = 5{,}6 \times 10^{5} / (51{,}62 \times 10^{-2}) = 5{,}6 \times 10^{5} / (5{,}162 \times 10^{-1}) = 1{,}08 \times 10^{6}$
$7{,}54 \times 10^{8} - 3{,}7 \times 10^{7} = 75{,}4 \times 10^{7} - 3{,}7 \times 10^{7} = 71{,}7 \times 10^{7} = 7{,}17 \times 10^{8}$
$\sqrt{90 \times 10^{7}} = (9 \times 10^{8})^{1/2} = \sqrt{9} \times (10^{8})^{1/2} = 3 \times 10^{4}$
$5{,}7 \times 10^{-4} + 240 \times 10^{-6} = 5{,}7 \times 10^{-4} + 2{,}40 \times 10^{-4} = 8{,}1 \times 10^{-4}$
$(780.000 \times 0{,}00496) / (0{,}0078 \times 0{,}009) = (7{,}8 \times 10^{5} \times 4{,}96 \times 10^{-3}) / (7{,}8 \times 10^{-3} \times 9 \times 10^{-3}) = 38{,}7 \times 10^{2} / 70{,}2 \times 10^{-6} = 3{,}87 \times 10^{3} / 7{,}02 \times 10^{-5} = 0{,}55 \times 10^{8} = 5{,}5 \times 10^{7}$
$59.000 \times 10^{3} \times 0{,}00009 = 5{,}9 \times 10^{7} \times 9 \times 10^{-5} = 53{,}1 \times 10^{2} = 5{,}31 \times 10^{3}$
$((5 \times 10^{-3})^{3} \times 0{,}005) / 0{,}00000095 = (125 \times 10^{-9} \times 5 \times 10^{-3}) / 9{,}5 \times 10^{-7} = 625 \times 10^{-12} / 9{,}5 \times 10^{-7} = 0{,}66 \times 10^{-3} = 6{,}6 \times 10^{-4}$

3. Resuelva aplicando notación científica:

$(5 \times 10^{8}) \times (3{,}5 \times 10^{-6}) / (4 \times 10^{-2}) = (17{,}5 \times 10^{2}) / (4 \times 10^{-2}) = 4{,}38 \times 10^{4}$

4. Exprese en notación científica

$382 = 3{,}82 \times 10^{2}$
$21.200 = 2{,}12 \times 10^{4}$
$62.000.000 = 6{,}2 \times 10^{7}$
$0{,}042 = 4{,}2 \times 10^{-2}$
$0{,}75 = 7{,}5 \times 10^{-1}$
$0{,}000069 = 6{,}9 \times 10^{-5}$
$0{,}0087 \times 10^{3} = 8{,}7$

$4.500 \text{ x } 10^5 = 4{,}5 \text{ x } 10^8$
$84{,}6 \text{ x } 10^{-5} = 8{,}46 \text{ x } 10^{-4}$
$0{,}12 \text{ x } 10^{-4} = 1{,}2 \text{ x } 10^{-5}$

5. Resolver las siguientes multiplicaciones:

$320 \times 2 \cdot 10^4 = 640 \text{ x } 10^4 = 6{,}40 \text{ x } 10^6$
$0{,}15 \times 5{,}1 \cdot 10^{-1} = 0{,}77 \text{ x } 10^{-1} = 7{,}7 \text{ x } 10^{-2}$
$54 \cdot 10^{-3} \times 305 = 16.470 \text{ x } 10^{-3} = 1{,}647 \text{ x } 10^4 \text{ x } 10^{-3} = 1{,}647 \text{ x } 10^1$
$4 \cdot 10^{-5} \times 1{,}2 \cdot 10^{-2} = 4{,}8 \text{ x } 10^{-7}$
$1{,}4 \cdot 10^{-5} \times 8{,}1 \cdot 10^3 = 11{,}3 \text{ x } 10^{-2} = 1{,}13 \text{ x } 10^{-1}$
$0{,}06 \times 300 = 6 \text{ x } 10^{-2} \text{ x } 3 \text{ x } 10^2 = 18$

6. Obtener los siguientes cocientes:

$$\frac{2{,}4 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^2} = 0{,}6 \cdot 10^1 = 6$$

$$\frac{2{,}4 \cdot 10^{-3}}{3{,}4 \cdot 10^{-2}} = 0{,}705 \cdot 10^{-1} = 7{,}05 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{5 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^4} = 1{,}25 \cdot 10^{-7}$$

$$\frac{2 \cdot 10^5}{1{,}6 \cdot 10^{-8}} = 1{,}25 \cdot 10^{13}$$

$$\frac{0{,}024}{200} = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^2} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{0{,}015}{0{,}05} = \frac{15 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-2}} = 3 \cdot 10^{-1}$$

7. Hallar el logaritmo neperiano de los siguientes números:

$Log_e \; e^4 = 4$
$Log_e \; e^{3{,}1} = 3{,}1$
$Log_e \; e^{0{,}02} = 0{,}02$

8. Hallar el logaritmo decimal

$log\ 0{,}026 = log\ 2{,}6 \times 10^{-2} = -1{,}59$
$log\ 42{,}6 = log\ 4{,}26 \times 10^{1} = 1{,}63$
$log\ 400 = log\ 4 \times 10^{2} = 2{,}6$
$log\ 0{,}004 = log\ 4 \times 10^{-3} = -2{,}39$
$log\ 8.200 = log\ 8{,}2 \times 10^{3} = 3{,}91$
$log\ 0{,}197 = log\ 1{,}97 \times 10^{-1} = -0{,}71$
$log\ 10^{7} \rightarrow 7$
$log\ 10^{-3{,}5} \rightarrow -3{,}5$

9. Realizar las siguientes operaciones

$$\log\left(\frac{10^{7}}{10^{-8}}\right) = \log 10^{7} - \log 10^{-8} = \log 10^{15} = 15$$

$$log\sqrt[3]{10^{4}} = log 10^{4/3} = \frac{4}{3}$$

$$log\left(10^{7} \times 10^{-5}\right) = log 10^{2} = 2$$

10. Hallar los antilogaritmos de las siguientes cantidades

$antilog\ 7 = 10^{7}$
$antilog\ -3{,}5 = 10^{-3{,}5} = 3{,}16 \times 10^{-4}$
$antilog\ 4 = 10^{4}$
$antilog\ 100 = 10^{100}$

11. ¿Cuál es el antilog de los siguientes números?

$antilog\ 0{,}4567 = 10^{0{,}4567} = 2{,}86$

$antilog\ 4{,}567 = 10^{4{,}567} = 36.897$

$antilog\ 456{,}7 = 10^{456{,}7}$ = infinito

12. Resolver

$10^{x} = 932$; $x = 2{,}97$

$10^{4{,}70} = x$; $x = 50.118$

13. Despeje "x" de las siguientes ecuaciones

a)

$$2x+5=9$$

$$2x=9-5=4$$

$$x=\frac{4}{2}$$

$$x=2$$

b)

$$3-\frac{x}{2}=1$$

$$-\frac{x}{2}=1-3=-2$$

$$x=-2\times-2=4$$

$$x=4$$

c)

$$4x-11=-5x+7$$

$$4x+5x=7+11$$

$$9x=18$$

$$x=\frac{18}{9}$$

$$x=2$$

d)

$$\frac{5}{x}+2=-3$$

$$\frac{5}{x}=-3-2$$

$$\frac{5}{x}=-5$$

$$\frac{5}{-5}=x$$

$$x=-1$$

e)

$$\frac{6x^2-12}{3x-4}=2x$$

$$6x^2-12=2x\times(3x-4)$$

$$6x^2-12=6x^2-8x$$

$$6x^2-6x^2-12=-8x$$

$$-12=-8x$$

$$x=\frac{-12}{-8}=\frac{3}{2}$$

$$x=\frac{3}{2}$$

14. Resuelva

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{10+6}{15}=\frac{16}{15}$$

$$\frac{2}{10}+\frac{2}{5}=\frac{2+4}{10}=\frac{6}{10}$$

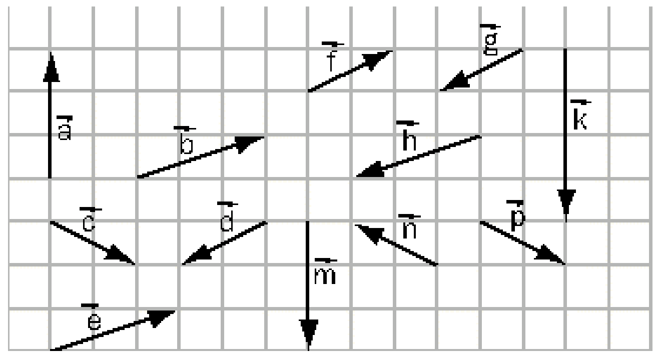
$$\frac{1}{8}+\frac{3}{9}=\frac{9+24}{72}=\frac{33}{72}=\frac{11}{24}$$

$$\frac{10}{4}-\frac{5}{2}=\frac{10-10}{4}=0$$

$$\frac{3}{6}+1=\frac{3+6}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

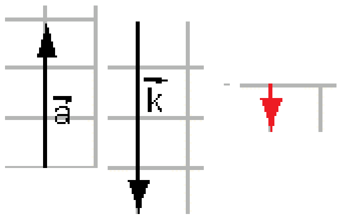
Vectores

15. Dados los vectores que se muestran en el esquema

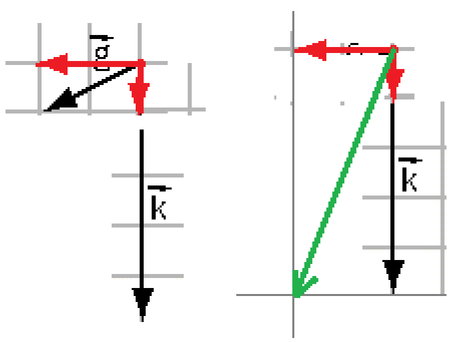


a) Calcule la resultante de:

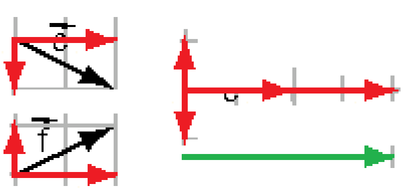
$\vec{a}+\vec{k}$



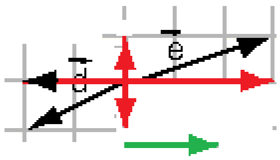
$\vec{g}+\vec{k}$



$\vec{c}+\vec{f}$



$\vec{e}+\vec{d}$



b) Indique qué vectores tienen idéntica dirección y sentido

$\vec{k}+\vec{m}$

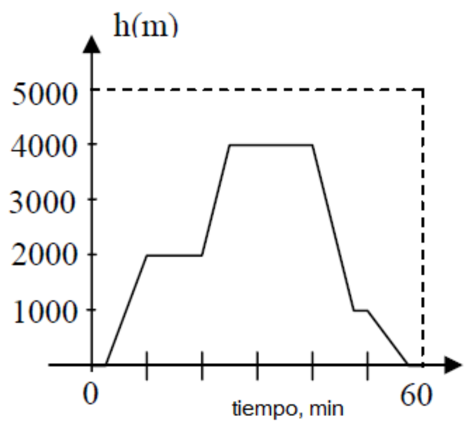
c) Indiqué qué vectores, tienen idéntica dirección pero distinto sentido

$\vec{a}+\vec{m}$

Funciones

Interpretación de un gráfico

16. Un avión, desde que sale de la terminal de Buenos Aires, hasta que llega a la terminal de Bahía Blanca tarda 60 minutos. El siguiente gráfico describe la altura del avión durante el viaje.



Observando el gráfico, responder:

a. ¿Cuál fue la altura máxima que alcanzó el avión? ¿Cuánto tiempo voló a esa altura?

4000 m, 15 min

b. ¿Cuánto tardó en llegar a la altura máxima?

25 min

c. ¿A qué altura se encontraba a los 30 minutos de partir?

4000 m

d. ¿Cuántas veces estuvo a 3000 metros de altura?

2 veces

e. ¿En qué momentos subió? ¿En qué momentos bajó?

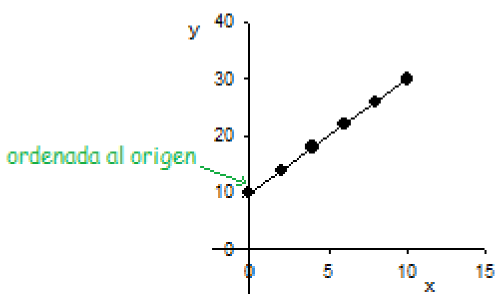
Subió de 2,5 a 10 min, de 20 a 25 min. Bajó de 40 a 47 min, y de 50 a 58 min

f. ¿Cuántas veces voló a altura constante?

3 veces (y 2 más a 0 m de altura)

Función lineal

17. Graficar la función: $f(x) = 2 \times x + 10$ para valores de x entre 0 y 10. Luego, indicar cuál es la pendiente y cuál la ordenada al origen.

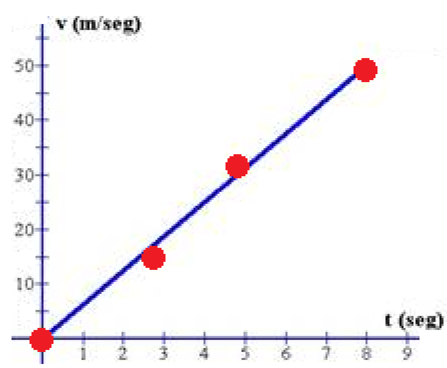


$f(x) = 2 \times x + 10$

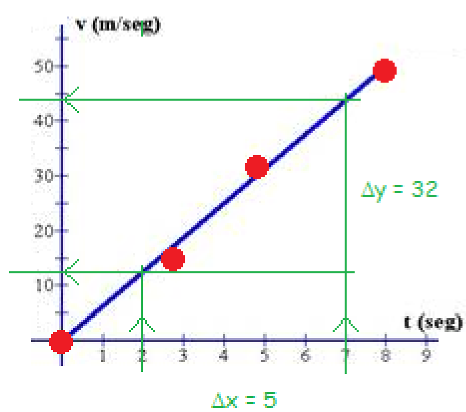
$m = 2$

$b = 10$

18. El siguiente gráfico corresponde a la velocidad medida para un automóvil en función del tiempo. Obtenga el valor de la pendiente y de la ordenada al origen.



Ordenada al origen = 0



$$m = 32 \text{ (m/seg)} / 5 \text{ (seg)} = 6{,}4 \text{ m/seg}^2$$

19. Supongamos que la regeneración de tejidos en función del tiempo tiene un comportamiento lineal, donde la variable independiente es el número de días en que se regenera un milímetro cuadrado de tejido. Se ha observado que el primer día no hay tejidos regenerados, sin embargo al cabo de 10 días se miden 4 mm^2 de tejidos regenerados. Determine (a) La pendiente y la ordenada al origen de la función lineal que describe el problema. (b) La cantidad de tejido regenerado, cuando han transcurrido 30 días. (c) El tiempo necesario para obtener 100 mm^2 de tejido.

x = número de días en que se regenera un milímetro cuadrado de tejido

x = 0 (día 1), y = 0

Ordenada al origen = 0

x = 10, y = 4 mm^2

$y = m\,x + b$

$4\ mm^2 = m \times 10\ días + 0$

a) $m = 4\ mm^2 / 10\ días = 0{,}4\ mm^2/día$

b) $y = 0{,}4\ mm^2/día \times 30\ días = 12\ mm^2$

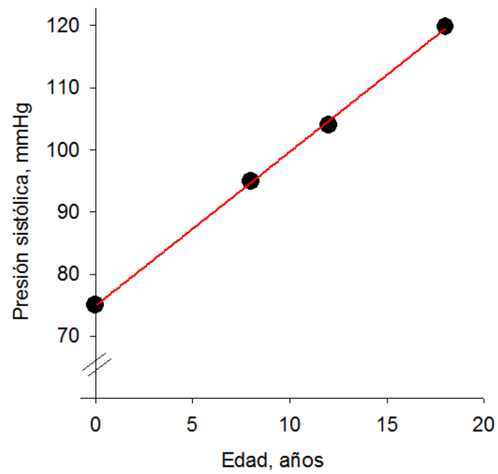
c) $100\ mm^2 = 0{,}4\ mm^2/día\ x$

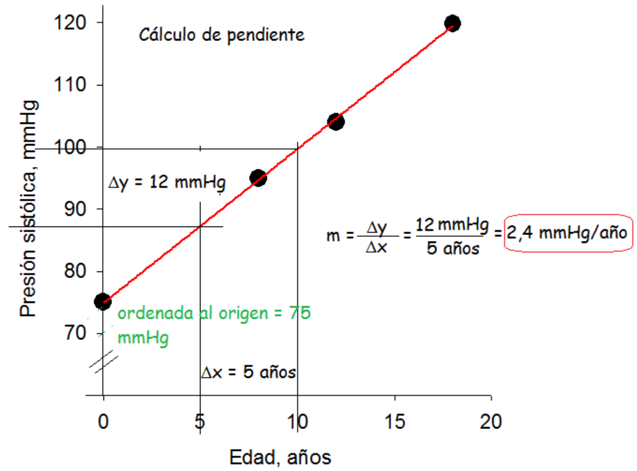
$100\ mm^2/0{,}4\ (mm^2/día) = 250\ días$

20. Una enfermera midió la presión sistólica de un niño desde su nacimiento hasta los 18 años. Obtuvo a lo largo del tiempo los siguientes resultados.

Edad, años	Presión sistólica, mmHg
Recién nacido (0)	75
8	95
12	104
18	120

Grafique la presión sistólica en función de la edad. Calcule la pendiente y la ordenada al origen de la recta que obtuvo.





Ordenada al origen = 75 mmHg
Pendiente = 2,4 mmHg / año

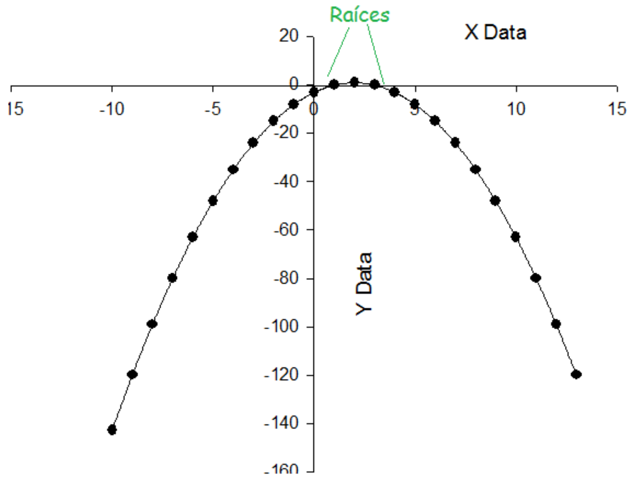
Función cuadrática. Parábola.

21. Grafique las siguientes funciones y halle las raíces de la función

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

a = -1
b = 4
c = -3

(Para graficar DEBEN confeccionar la tabla variando valores de x, y obteniendo los valores de y. Esto se hace siempre y para todas las funciones que deban graficar).

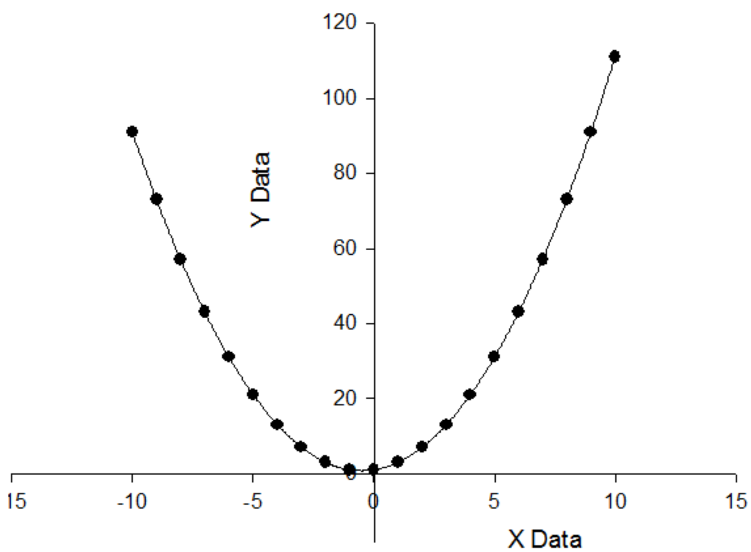


$$x_{raiz} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \times a \times c}}{2 \times a}; \quad x_{raiz} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times (-1) \times (-3)}}{2 \times (-1)}$$

$$x_1^{raiz} = \frac{-4 - \sqrt{16-12}}{-2} = \frac{-4 - \sqrt{4}}{-2} = \frac{-4-2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_2^{raíz} = \frac{-4 + \sqrt{16-12}}{-2} = \frac{-4 + \sqrt{4}}{-2} = \frac{-4+2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$y = x^2 + x + 1$



$$x_{raiz} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \times a \times c}}{2 \times a}; \quad x_{raiz} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (1) \times (1)}}{2 \times (1)}$$

$$x_{raiz} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

(No se puede resolver la raíz cuadrada de un número negativo en los números reales, por ello la gráfica no corta el eje de las abscisas)

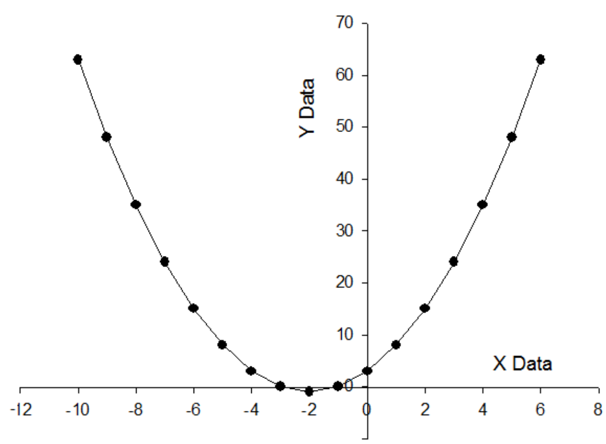
22. Obtenga las raíces de las siguientes funciones cuadráticas. Elija dos de ellas y grafíquelas.

$y = x^2 + 4x + 3$

$$x_{raiz} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$x_1^{raíz} = \frac{-4 - \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2} = \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

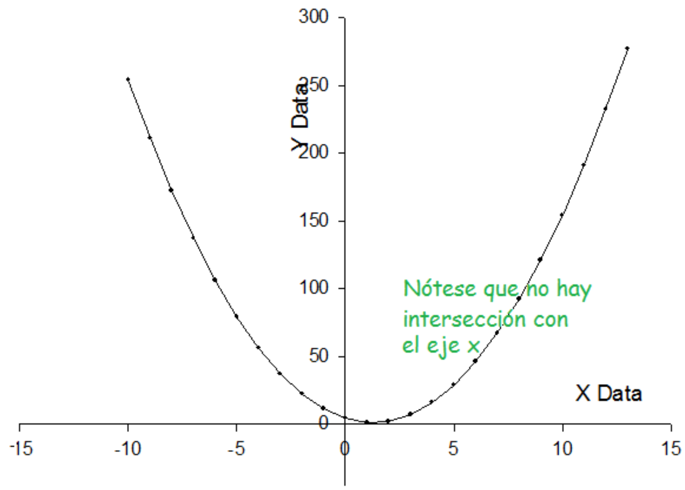
$$x_2^{raíz} = \frac{-4 + \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2} = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$



$y = 2x^2 - 5x + 4$

$$x_{raiz} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 2 \times 4}}{2 \times 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-32}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{-6}}{4}$$

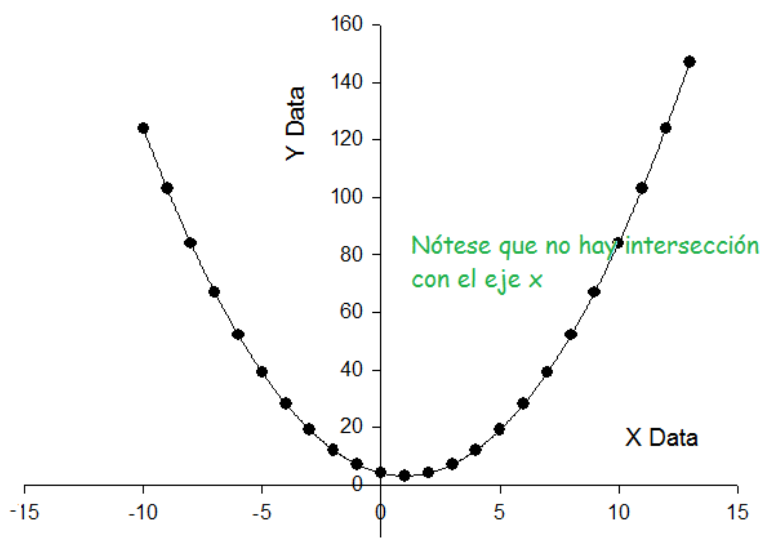
No tiene resolución en los números reales



$y = x^2 - 2x + 4$

$$x_{raiz} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

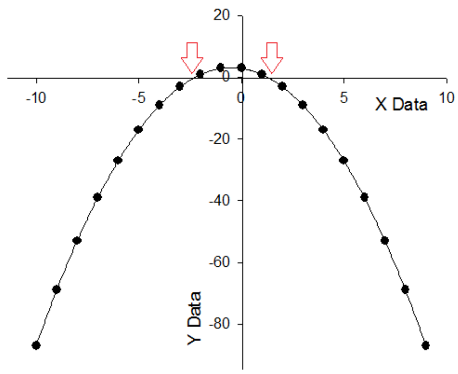
No tiene resolución en los números reales



$y = -x^2 - x + 3$

$$x_{raiz} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times (-1) \times 3}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12}}{2}$$

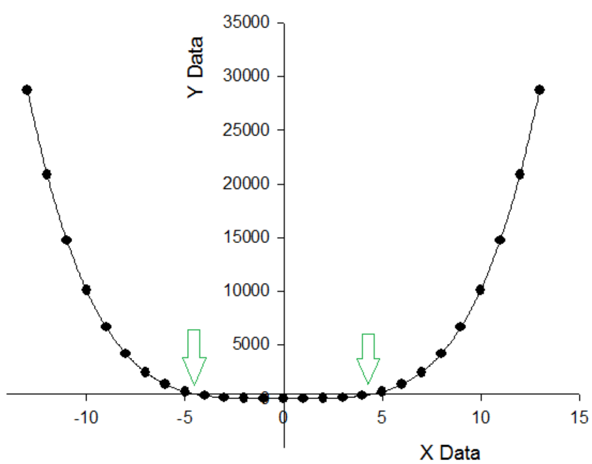
$$x_1^{raíz} = \frac{1-\sqrt{1+12}}{2} = \frac{1-\sqrt{13}}{2} = 1{,}30$$
$$x_2^{raíz} = \frac{1+\sqrt{1+12}}{2} = \frac{1+\sqrt{13}}{2} = -2{,}30$$



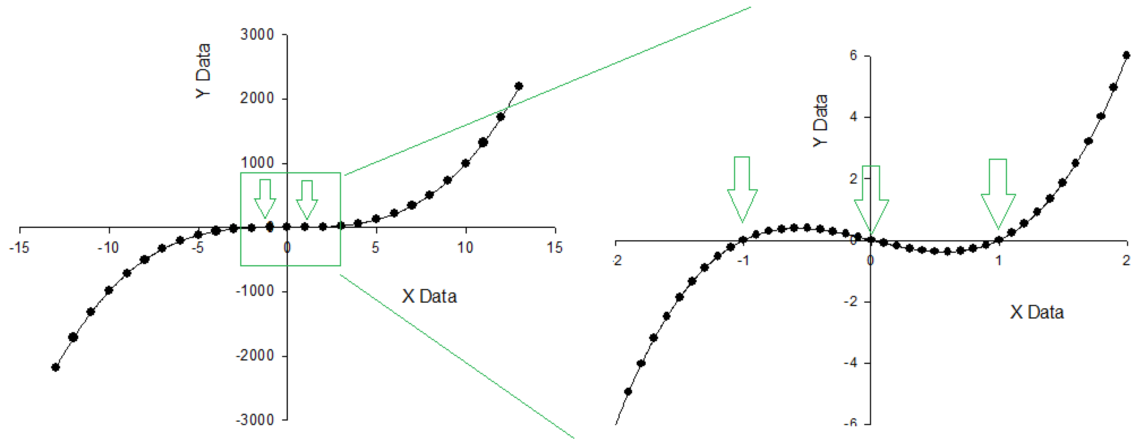
Se confirma el resultado analítico de las raíces en el gráfico (ver flechas).

Polinomios

23. Represente la función $y = x^4 - x^2$, y señale sus intersecciones con los ejes de abscisas y ordenadas.



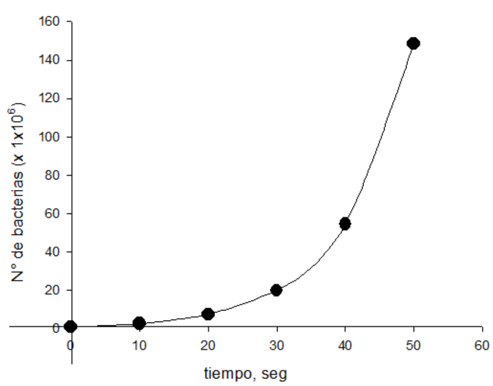
24. Represente la función $y = x^3 - x^1$, y señale sus intersecciones con los ejes de coordenadas.



Funciones exponenciales

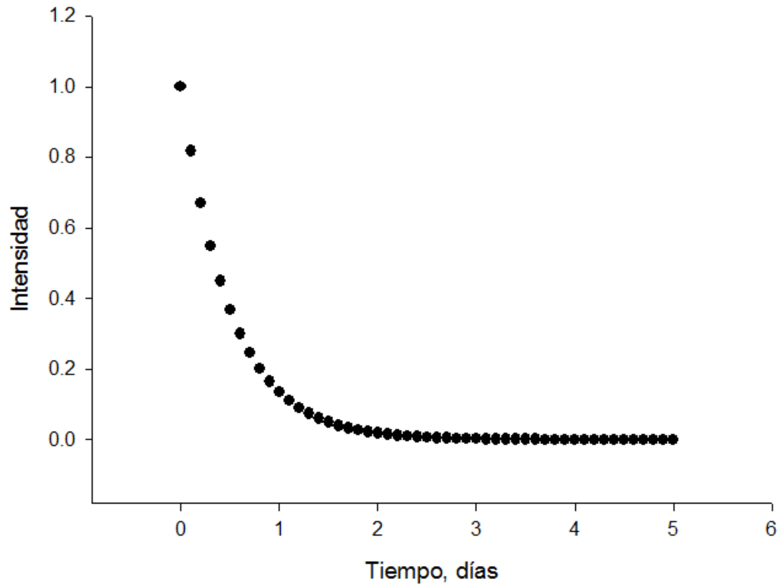
25. Una población de bacterias crece según $C_t = C_0 \times e^{kt}$, donde C_0, es la concentración inicial de bacterias, *t* es el tiempo en segundos, y k es la constante de incremento de la población. Al iniciar el experimento hay 10^6 bacterias. Considerando que la constante k es igual a 10^{-1} seg^{-1}, grafique la concentración de bacterias en el tiempo (C_t), entre los 0 y los 50 seg.

Función: $C_t = 10^6 \times e^{0{,}1 \times t}$



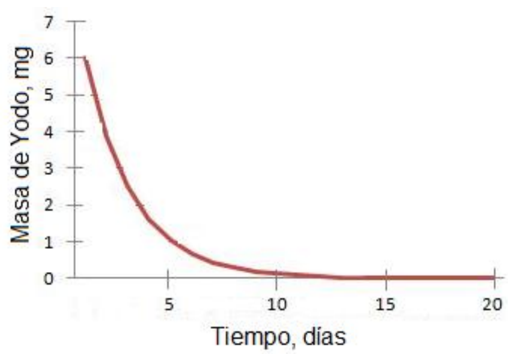
26. La radiactividad o radioactividad es un fenómeno físico por el cual los núcleos de algunos elementos químicos, llamados radiactivos, emiten radiaciones. Un elemento radiactivo decae según $I_t = e^{-kt}$ siendo k = 2 $días^{-1}$. Grafique el decaimiento radiactivo e indique qué cantidad queda del elemento respecto de la inicial luego de 1 día.

$$I_t = e^{-2t}$$



Interpolando en el gráfico, podemos saber que el día 1, queda el 0,13 de la intensidad inicial

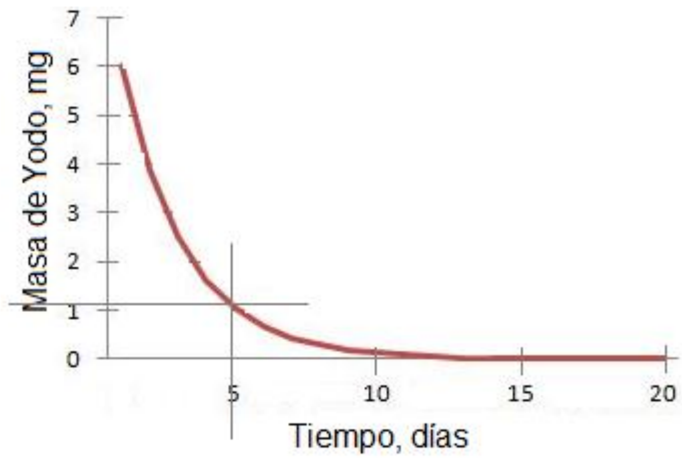
27. El yodo radioactivo (I^{131}) se acumula en la glándula tiroides y es utilizado, en algunos casos, para evaluar la función de la glándula. El siguiente gráfico muestra cómo se reduce la cantidad de yodo en función del tiempo. Considere que a tiempo cero la masa de yodo es de 7 mg.



¿Cuál es la constante de decaimiento de este elemento?

$$Masa = 7\ mg \times e^{-kt}$$

Tomamos un punto cualquiera de la curva (yo elegí el valor al día 5)



Y reemplazamos en los valores en la ecuación

$$\ln\left(\frac{masa}{7\ mg}\right) = -kt$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{masa}{7\ mg}\right)}{-t}$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{1{,}1\ mg}{7\ mg}\right)}{-5\ días} = -0{,}37\frac{mg}{día}$$

Funciones logarítmicas

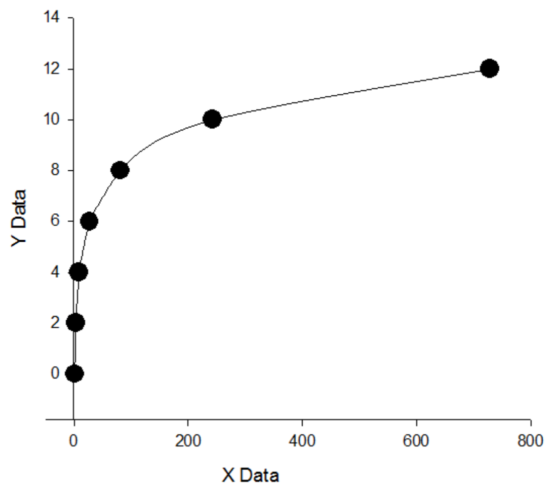
28. Represente las funciones

$f(x) = 2 \times \log_3(x)$

Construyamos la tabla:

x	$f(x) = 2 \times log_3(x)$
1	$f(x) = 2 \times 0 = 0$
3	$f(x) = 2 \times 1 = 2$

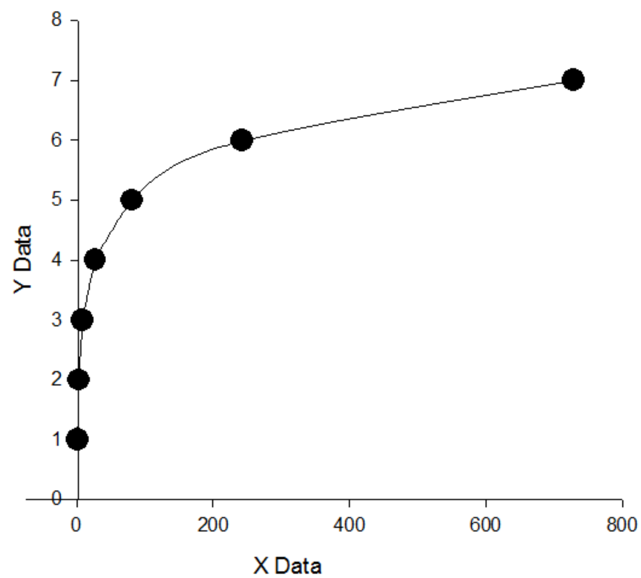
9	$f(x) = 2 \times 2 = 4$
27	$f(x) = 2 \times 3 = 6$
81	$f(x) = 2 \times 4 = 8$
243	$f(x) = 2 \times 5 = 10$
729	$f(x) = 2 \times 6 = 12$



$$f(x) = log_3\, x + (1)$$

x	$f(x) = log_3\, x + (1)$
1	$f(x) = 0 + 1 = 1$
3	$f(x) = 1 + 1 = 2$
9	$f(x) = 2 + 1 = 3$
27	$f(x) = 3 + 1 = 4$
81	$f(x) = 4 + 1 = 5$

243	$f(x)=5+1=6$
729	$f(x)=6+1=7$



29. Definiendo el pH como la representación logarítmica de la concentración de iones hidrógeno (H^+) de un líquido biológico (pH = -Log[H^+], que representa su acidez, ¿cuáles son las concentraciones de hidrógeno de los siguientes pH: 7; 8; 6; 5; 7,2; 7,4; 6,8; 3,1?

pH = 7, pH = -log [H^+] → [H^+] = 10^{-7} M
pH = 8, pH = -log [H^+] → [H^+] = 10^{-8} M
pH = 6 , pH = -log [H^+] → [H^+] = 10^{-6} M
pH = 5, pH = -log [H^+] → [H^+] = 10^{-5} M
pH = 7,2, pH = -log [H^+] → [H^+] = $10^{-7,2}$ M = 6,3 x 10^{-8} M
pH = 7,4, pH = -log [H^+] → [H^+] = $10^{-7,4}$ M = 3,9 x 10^{-8} M
pH = 6,8, pH = -log [H^+] → [H^+] = $10^{-6,8}$ M = 1,58 x 10^{-7} M
pH = 3,1, pH = -log [H^+] → [H^+] = $10^{-3,1}$ M = 7,4 x 10^{-4} M

30. ¿Cuál de los siguientes pHs representa la mayor y menor concentraciones de H^+? 7,2; 7,4; 7,1; 6,8; 7,5?

De menor a mayor concentración: 7,5; 7,4; 7,2; 7,1; 6,8

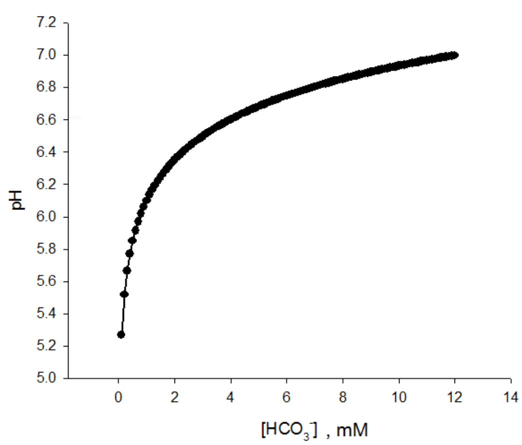
31. Uno de los aspectos más importantes de la fisiología es el mantenimiento del pH celular. El pH es la representación logarítmica del nivel de acidez del medio. Cada célula de nuestro organismo vive a un pH en particular, aunque de forma general podemos decir que las células de

nuestro cuerpo conviven con un pH interno de 7,4 y uno externo de 7,2. Cabe aclarar que existen células como las del fundus del estómago que conviven con pH igual a 1. Uno de los sistemas de regulación de pH más importantes a nivel fisiológico es el sistema dióxido de carbono (CO_2) / carbonato (CO_3^{2-}) / bicarbonato (HCO_3^-). Sabiendo que el pH sigue la siguiente función:

$$pH = 6{,}1 + log \frac{\left[HCO_3^-\right]}{0{,}03 \dfrac{mM}{mmHg} \times pCO_2}$$

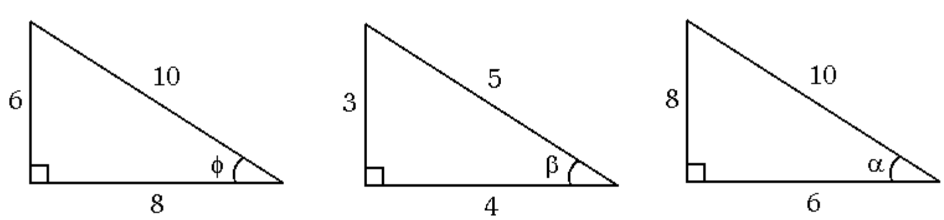
Y sabiendo que la presión de CO_2 (pCO_2) es de 40 mmHg, grafique el pH en función de la concentración de HCO_3^- para [HCO_3^-] entre 0 y 12 mM.

$$pH = 6{,}1 + log \frac{\left[HCO_3^-\right]}{0{,}03 \dfrac{mM}{mmHg} \times 40\, mmHg}$$



Trigonometría

32. Calcule el seno, el coseno y la tangente de los ángulos indicados en los triángulos



$$\sin\phi = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{6}{10} = 0{,}60$$

$$\cos\phi = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{8}{10} = 0{,}80$$

$$tg\phi = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

$$\sin\beta = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\cos\beta = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

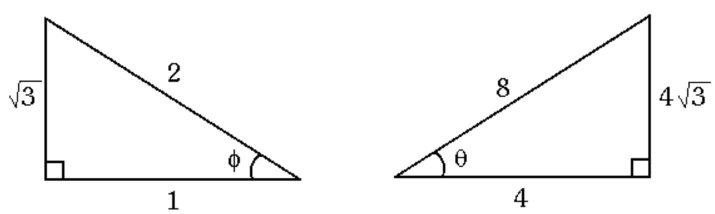
$$tg\beta = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\sin\alpha = \frac{opuesto}{hipotenusa} = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

$$\cos\alpha = \frac{adyacente}{hipotenusa} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$tg\alpha = \frac{opuesto}{adyacente} = \frac{8}{6} = 1{,}33$$

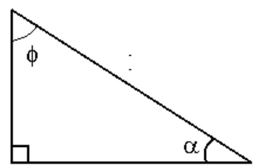
33. Calcule la secante y la cosecante de los ángulos indicados en los triángulos



$$\sec\phi = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{2}{1} = 2 \qquad cosec\phi = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1{,}73} = 1{,}16$$

$$\sec\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{8}{4} = 2 \qquad cosec\theta = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{8}{4\sqrt{3}} = \frac{8}{4 \times 1{,}73} = 1{,}15$$

34. Sabiendo que α = 30°, calcule el valor del ángulo ϕ



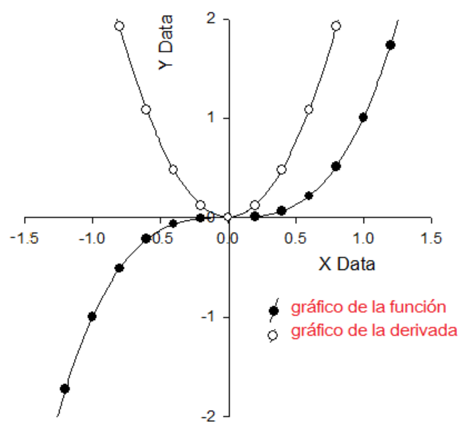
$$180° = 90° + \phi + \alpha$$
$$\phi = 180° - 90° - \alpha$$
$$\phi = 180° - 90° - 30° = 60°$$

Derivadas

35. Hallar la derivada de la función $y = x^3$. Calcular el valor de la derivada cuando x_1 = 2, x_2 = 0, y x_3 = -2. Comprobarlo gráficamente.

$$\frac{dy}{dx} = d\left(x^3\right)dx = 3x^2$$

$$y_1 = 3 \times 2^2 = 12$$
$$y_2 = 3 \times 0^2 = 0$$
$$y_3 = 3 \times (-2)^2 = 12$$



36. Hallar la derivada de la función $y = \frac{1}{x}$

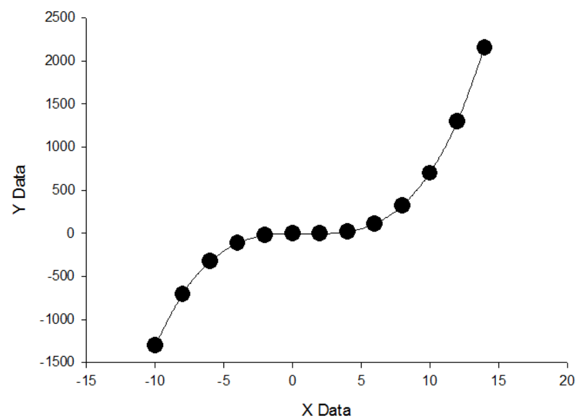
$$\frac{dy}{dx} = d\left(\frac{1}{x}\right)dx = d\left(x^{-1}\right)dx = -x^{-2}$$

37. Hallar mediante la derivada y su representación gráfica, los máximos y mínimos de las funciones

$$y = x^3 - 3x^2$$
$$z = x^4 - 2x^2$$
$$y^2 + x^2 = r^2$$

a) $y = x^3 - 3x^2$

$$\frac{dy}{dx} = d\left(x^3 - 3x^2\right)dx = d\left(x^3\right)dx - d\left(3x^2\right)dx = 3x^2 - 6x$$



Región sin cambio de pendiente (m = 0)

$$0 = 3x^2 - 6x$$
$$0 = x \times (3x - 6)$$

Esto se cumple si:

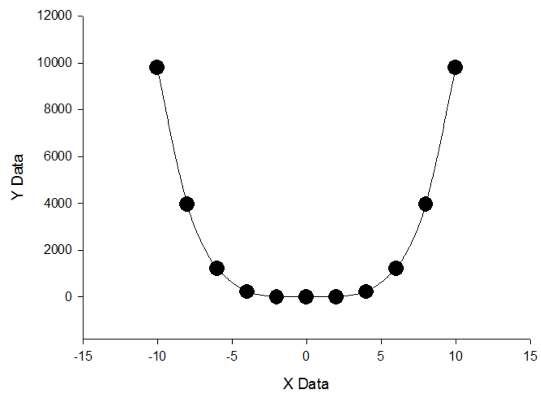
$$x = 0$$

y

$$3x - 6 = 0$$
$$\therefore 3x = 6$$
$$x = 2$$

b) $z = x^4 - 2x^2$

$$\frac{dz}{dx} = d\left(x^4 - 2x^2\right)dx = d\left(x^4\right)dx - d\left(2x^2\right)dx = 4x^3 - 4x$$



Región sin cambio de pendiente (m = 0), en este caso, mínimo de la curva

$$0 = 4x^3 - 4x$$
$$0 = x\left(4x^2 - 4\right)$$

Entonces:

$$x = 0$$
$$4x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = \frac{4}{4} = 1$$
$$\therefore x = 1, x = -1$$

d) $y^2 + x^2 = r^2$

(Problema eliminado)

Integrales

38. Hallar las integrales de las siguientes funciones:

$$2x^2 \rightarrow \int 2x^2 dx = \frac{2x^3}{3} + C$$

$$\frac{2}{3}x^3 \rightarrow \int \frac{2}{3}x^3 dx = \frac{x^4}{6} + C$$

$$3x^2 + 2x \rightarrow \int \left(3x^2 + 2x\right) dx = x^3 + x^2 + C$$

39. Resolver las siguientes integrales definidas:

a) $I_1 = \int_0^2 x^2 dx$

$$I_1 = \int_0^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3} + C\right|_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} + C\right) - \left(\frac{0^3}{3} + C\right) = \frac{8}{3}$$

b) $I_2 = \int_0^4 x^3 dx$

$$I_2 = \int_0^4 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4} + C\right|_0^4 = \left(\frac{4^4}{4} + C\right) - \left(\frac{0^4}{4} + C\right) = \frac{256}{4} = 64$$

40. Hallar el área comprendida bajo la curva $y = \frac{1}{x}$, entre los valores $x_1 = 1$, y $x_2 = e$.

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = ln\, x + C\Big|_1^e = (ln(e) + C) - (ln(1) + C) = 1 - 0 = 1$$

41. Hallar el área comprendida bajo la curva $y = \frac{1}{x^2}$, entre los valores $x_1 = 1$, y $x_2 = \infty$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} = \left.-\frac{1}{x} + C\right|_1^\infty = \left(-\frac{1}{\infty} + C\right) - \left(-\frac{1}{1} + C\right) = 0 + 1 = 1$$

Mediciones

42. ¿Cuál es el área de un círculo de 3,5 cm de diámetro? Expresarlo en m^2

$$A = \pi \times r^2 = \pi \times \left(1{,}75 \times 10^{-2} m\right)^2 = \pi \times 3{,}06 \times 10^{-4} m^2 = 9{,}6 \times 10^{-4}\ m^2$$

43. El corazón bombea sangre a un ritmo de 0,083 l/seg. Expresar este valor en cm^3/seg

Recordando que 1 litro equivale a 1 dm^3 (o a 1000 cm^3)

$$0{,}083 \frac{l}{seg} = 0{,}083 \frac{dm^3}{seg} = 0{,}083 \frac{(10\, cm)^3}{seg} = 0{,}083 \times 10^3 \frac{cm^3}{seg} = 83 \frac{cm^3}{seg}$$

44. ¿Cuál es el volumen de una célula esférica de 50 μm de diámetro?

(Aproximando π a 3,14)

$$V = \frac{4}{3}\pi\, r^3 = \frac{4}{3}\pi(25\mu m)^3 = 65.417\mu m^3$$

45. La densidad normal de la orina oscila entre 1,002 - 1,035 g/ml. Expresar estos valores en kg/cm^3.

Recordando que 1 ml equivale a 1 cm^3

$$\delta_{orina} = (1{,}002 - 1{,}035)\frac{g}{ml} = (1{,}002 - 1{,}035)\frac{(10^{-3})kg}{cm^3} = (1{,}002 - 1{,}035)\times 10^{-3}\frac{kg}{cm^3}$$

46. La relación 1/1.000.000 g equivale a:

a) 1 ng
b) 10^3 pg
c) 10^6 fg
d) 10 Å
e) nada de lo anterior es correcto

$$\frac{1}{1.000.000} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}\,g = 1\mu g = 1.000 ng = 10^6\,pg = 10^4\,Å = 10^9\,fg$$

47. En un cultivo de orina se obtienen 1,3 x 10^6 bacterias por mm^3, esto significa que:

a) tiene 13 x 10^6 bacterias por mm^3 de orina
b) tiene 1.300 bacterias por mm^3 de orina
c) tiene 1.300.000 bacterias por mm^3 de orina
d) tiene 0,0000013 bacterias por mm^3 de orina
e) tiene 0,00013 bacterias por mm^3 de orina

Nociones de Bioestadística

48. Indique qué variables son cualitativas y cuáles cuantitativas:

Número de goles que hizo un equipo de fútbol en un torneo CUANTITATIVA
Altura de una persona CUANTITATIVA
Número de alumnos en la facultad CUANTITATIVA

Color de ojos de tus compañeros de clase CUALITATIVA
Velocidad a la cual se desplaza un vehículo CUANTITATIVA

49. Clasificar las siguientes variables en cualitativas y cuantitativas discretas o continuas.

Nacionalidad de una persona CUALITATIVA
Número de libros en un estante CUANTITATIVA DISCRETA
Área de las baldosas de un edificio CUANTITATIVA CONTINUA
Temperatura medida en una ciudad durante un año CUANTITATIVA CONTINUA

50. Calcular la media, la mediana y desvío estándar de la siguiente serie de números: 5, 3, 6, 5, 4, 5, 2, 8, 6, 5, 4, 8, 3, 4, 5, 4, 8, 2, 5, 4.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (5+3+6+5+4+5+2+8+6+5+4+8+3+4+5+4+8+2+5+4)}{20} = 4{,}8$$

$$\overline{X} \approx 5$$

(Dado que las mediciones son en números enteros, debemos expresar la media sin decimales)

Mediana = 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 8, 8 → (5+5)/2 = 5

medición	$x_i - \overline{X}$, $mmHg$	$(x_i - \overline{X})^2$, $mmHg^2$
1	5 - 4,8 = 0,2	0,04
2	3 - 4,8 = -1,8	3,24
3	6 - 4,8 = 1,2	1,44
4	5 - 4,8 = 0,2	0,04
5	4 - 4,8 = -0,8	0,64
6	5 - 4,8 = 0,2	0,04
7	2 - 4,8 = -2,8	7,84
8	8 - 4,8 = 3,2	10,24
9	6 - 4,8 = 2,8	7,84
10	5 - 4,8 = 0,2	0,04
11	4 - 4,8 = -0,8	0,64
12	8 - 4,8 = 3,2	10,24
13	3 - 4,8 = -1,8	3,24
14	4 - 4,8 = -0,8	0,64
15	5 - 4,8 = 0,2	0,04
16	4 - 4,8 = -0,8	0,64
17	8 - 4,8 = 3,2	10,24
18	2 - 4,8 = -2,8	7,84

19 20	5 - 4,8 = 0,2 4 - 4,8 = -0,8	0,04 0,64

$$DE = \sqrt{\frac{(0{,}04+3{,}24+1{,}44+0{,}04+0{,}64+0{,}04+7{,}84+10{,}24+7{,}84+0{,}04+0{,}64+10{,}24+3{,}24+0{,}64+0{,}04+0{,}64+10{,}24+7{,}84+0{,}04+0{,}64)}{20-1}}$$

$$DE = 1{,}76 \approx 2$$

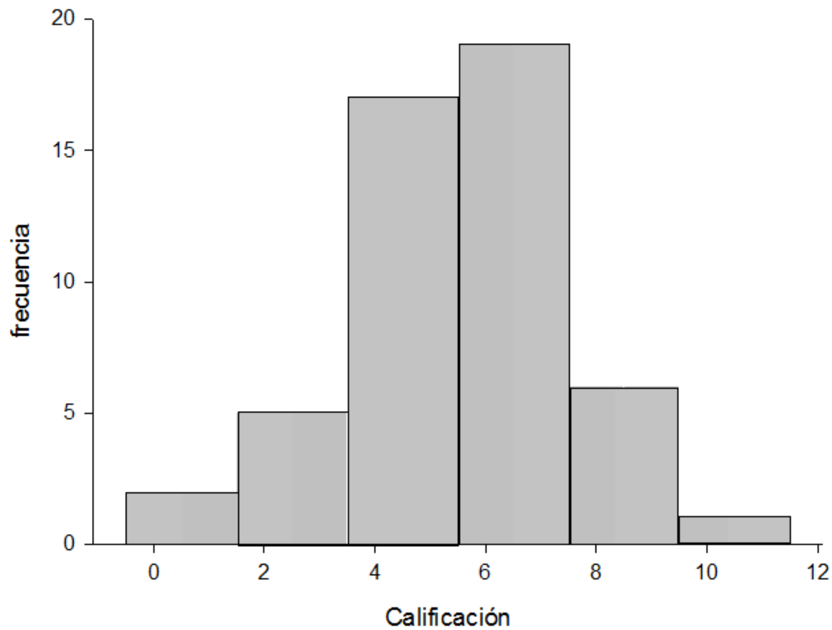
51. Las calificaciones de 50 alumnos en Biofísica en un curso han sido las siguientes:
5, 2, 4, 9, 7, 4, 5, 6, 5, 7, 7, 5, 5, 2, 10, 5, 6, 5, 4, 5, 8, 8, 4, 0, 8, 4, 8, 6, 6, 3, 6, 7, 6, 6, 7, 6, 7, 3, 5, 6, 9, 6, 1, 4, 6, 3, 5, 5, 6, 7. Graficar la distribución de frecuencias e indicar cuál es la distribución que se observa.
Dato: Los intervalos se pueden calcular obteniendo el rango (valor máximo – valor mínimo)/Log N, donde N es el número total de casos en la muestra.

Intervalos:
(10 – 0)/Log 50 = 10 / 1,7 = 5,9 (Vamos a armar 6 intervalos)

N° de repeticiones de 0 = 1
N° de repeticiones de 1 = 1
N° de repeticiones de 2 = 2
N° de repeticiones de 3 = 3
N° de repeticiones de 4 = 6
N° de repeticiones de 5 = 11
N° de repeticiones de 6 = 12
N° de repeticiones de 7 = 7
N° de repeticiones de 8 = 4
N° de repeticiones de 9 = 2
N° de repeticiones de 10 = 1

Intervalo 0-1 = 2, Intervalo 2-3 = 5, Intervalo 4-5 = 17, Intervalo 6-7 = 19, Intervalo 8-9 = 6, Intervalo 10-11 = 1

Vamos a graficarlo


20
15
10
5
0
frecuencia
0
2
4
6
8
10
12
Calificación